



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Memoria para optar al título  
de Ingeniero Civil Matemático

---

# Simulación numérica de un proceso de sedimentación inclinada con convección natural

---

*Autor*

Lucas Alberto Romero Jorquera

*Director de Memoria*

Raimund Klaus Bürger

CI<sup>2</sup>MA & Departamento de Ingeniería Matemática  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Concepción  
Casilla 160-C

*Co-Director de Memoria*

Fernando Elías Betancourt Cerda

CI<sup>2</sup>MA &

Departamento de Ingeniería Metalúrgica  
Universidad de Concepción

**Octubre, 2023**  
CONCEPCIÓN, CHILE

# Agradecimientos

## Proyectos de investigación y apoyo institucional

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han contribuido a la realización de esta tesis.

En primer lugar, agradezco al Profesor Raimund Burgüer, mi director de tesis, por su invaluable orientación, paciencia y apoyo constante durante todo el proceso de investigación y redacción. Su experiencia y conocimientos han sido fundamentales para la culminación de este trabajo.

A mis profesores y compañeros de la CFM, gracias por los conocimientos compartidos y el apoyo brindado a lo largo de mis estudios.

Agradezco también a CI<sup>2</sup>MA por facilitarme los recursos necesarios y por el acceso a una oficina, que fueron esenciales para mi investigación.

No puedo dejar de mencionar a mis amigos y colegas, quienes con su camaradería y apoyo emocional hicieron más llevadero este desafío. Un agradecimiento especial a Vicente, Alan, Arturo, Claudio, Esteban, Nicolás y Sergio por su constante ánimo y por creer en mí.

En particular, quisiera agradecer a Julio Careaga, una persona que sin dudarlo me ayudó en los momentos más complicados del desarrollo de esta tesis. Estuvo constantemente monitoreando mis avances y, a pesar de todo, siempre estaba para guiarme en cada paso correctamente con mi trabajo. Estaré eternamente agradecido por tu ayuda y sabes que para cualquier cosa contarás conmigo.

Quisiera expresar un agradecimiento muy especial a Constanza. Tu amor, paciencia y constante apoyo han sido una fuente inagotable de inspiración y motivación para mí durante todo el proceso de esta tesis. Gracias por estar a mi lado en los momentos de estrés y cansancio, y por celebrar conmigo cada pequeño logro. Tu comprensión y ánimo me han dado la fuerza para seguir adelante, y no tengo palabras suficientes para agradecerte por todo lo que has hecho por mí.

Finalmente, a mi familia, especialmente a mis padres Marcela y Domingo, por su amor incondicional, comprensión y apoyo a lo largo de estos años. Sin ustedes, este logro no habría sido posible.

Esta tesis ha sido preparada en el marco y con el apoyo financiero de las siguientes instituciones y proyectos de investigación:

- Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) a través de su programa de becas ANID-PCHA/Doctorado Nacional/2020-21200939
- Proyecto Anillo ANID/PIA/ACT210030
- Centro de Modelamiento Matemático con los proyectos BASAL ACE210010 y FB210005
- Proyecto Fondecyt 1210610
- Centro de Recursos Hídrico para la Agricultura y Minería (CRHIAM) con el proyecto ANID/FONDAP/15130015

Estoy profundamente agradecido por el apoyo recibido de cada una de las instituciones, así como también de los proyectos de investigación. Que han contribuido a la realización de esta memoria.

# Índice general

Capítulos	Página
<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Sedimentación inclinada . . . . .	5
2.2. Convección natural en cavidades . . . . .	7
2.2.1. Análisis dimensional . . . . .	9
<b>3. Descripción del proceso</b>	<b>12</b>
3.1. Supuestos y ecuaciones del problema . . . . .	12
<b>4. Esquema numérico</b>	<b>14</b>
4.1. Aproximación numérica para la ecuación de la concentración . . . . .	15
4.2. Aproximación numérica del sistema de Stokes . . . . .	16
4.2.1. Discretización de los terminos . . . . .	17
4.2.2. Esquema para la solución de la ecuación de Stokes . . . . .	18
4.3. Método de resolución de la ecuación del calor . . . . .	19
4.4. Aproximación numérica de la ecuación del calor . . . . .	20
4.4.1. Resolución método explícito . . . . .	20
4.4.2. Resolución método implícito . . . . .	20
4.5. Condición CFL . . . . .	21
4.6. Estrategia de acoplamiento . . . . .	22
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>23</b>
5.1. Simulación numérica del test de Diehl . . . . .	24

5.2. Validación del esquema numérico utilizado . . . . .	25
5.3. Simulación de proceso de sedimentación inclinada bajo convección natural	26
5.4. Análisis de producción de agua clara . . . . .	28
5.5. Análisis de asentamiento de sólido . . . . .	29
<b>6. Conclusiones, limitaciones y trabajos futuros</b>	<b>31</b>
<b>7. Anexo</b>	<b>32</b>
7.1. Esquema matricial para ecuación de Stokes . . . . .	32
7.1.1. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K}$ . . . . .	32
7.1.2. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}$ . . . . .	35
7.1.3. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathcal{T}_\sigma$ . . . . .	38
7.1.4. Esquema global . . . . .	39
7.2. Esquema numérico para el flujo . . . . .	40
7.3. Esquema matricial para la ecuación del calor . . . . .	41
7.3.1. Matriz $D(\phi^n)$ . . . . .	41
7.3.2. Matriz $BC$ . . . . .	44
7.4. Resultados numéricos . . . . .	45

# Índice de figuras

1.1. Esquema ilustrativo de un sedimentador lamelar . . . . .	1
2.1. Esquema ilustrativo de teoría PNK . . . . .	6
2.2. Esquema ilustrativo del fenómeno de convección natural . . . . .	7
3.1. Condiciones iniciales del sistema . . . . .	13
4.1. Discretización del dominio $\Omega$ en volúmenes de control $K_{i,j}$ . . . . .	15
5.1. Resultados numéricos para los primeros instantes de tiempo de simulación del Test de Diehl para un ángulo de inclinación $\theta = 30^\circ$ y una variación de temperatura $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ . . . . .	24
5.2. Esquema del proceso físico que se desea modelar (izquierda), módulos de velocidad obtenidos del proceso de convección de natural con $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ (derecha) . . . . .	25
5.3. Proceso de sedimentación casi terminado con concentración inicial $\phi_0 = 0,2$ (izquierdo), módulos de las velocidades en el sistema una vez terminada la sedimentación del sólido (derecha). . . . .	26
5.4. Proceso de sedimentación consolidación en un recipiente con una inclinación de $\theta = 30^\circ$ bajo una variación de temperatura $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ (fila superior) y sin variación de temperatura (fila inferior) para un instante de tiempo $t = 2$ . . . . .	27
7.2. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10 % y una variación de temperatura igual a $20^\circ$ para un instante de tiempo $t = 2,2$ . . . . .	46
7.3. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10 % y una variación de temperatura igual a $40^\circ$ para un instante de tiempo $t = 2$ . . . . .	47

7.4. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20 % y una variación de temperatura igual a cero para un instante de tiempo $t = 2,5$ . . . . .	48
7.5. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20 % y una variación de temperatura igual a $20^\circ$ para un instante de tiempo $t = 2,2$ . . . . .	49
7.6. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20 % y una variación de temperatura igual a $40^\circ$ para un instante de tiempo $t = 2,2$ . . . . .	50
7.7. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a cero, para un instante de tiempo $t = 3$ . . . . .	51
7.8. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a $20^\circ$ , para un instante de tiempo $t = 2,9$ . . . . .	52
7.9. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a $40^\circ$ , para un instante de tiempo $t = 2,9$ . . . . .	53
7.1. Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10 % y una variación de temperatura igual a cero para un instante de tiempo $t = 3$ . . . . .	54

# Índice de cuadros

5.1. Valor de las propiedades físicas del sólido y fluido. . . . .	23
5.2. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 20% . . . . .	28
5.3. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 10% . . . . .	28
5.4. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 5% . . . . .	29
5.5. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 20% . . . . .	29
5.6. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 10% . . . . .	30
5.7. Coeficientes de eficiencia $\eta$ para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 5% . . . . .	30

## Motivación

El desafío de aumentar la reutilización de agua en la industria minera ha inducido la creación de distintos tipos de procesamiento de minerales. Procesos como filtración, separación mediante centrifugado, sedimentación mediante fuerzas gravitatorias actualmente se usan con el fin de optimizar la recuperación del vital elemento. Entre la tecnología que existe a día de hoy se encuentran los sedimentadores lamelares, contenedores equipados de un conjunto de placas inclinadas y paralelas inmersas en la mezcla a separar (ver Figura 1.1), la sedimentación en este equipo es netamente a través de fuerzas gravitacionales, por lo tanto, la inclinación de las placas equipadas está orientado a evitar una sedimentación netamente vertical dentro del estanque y generar así un efecto Boycott que aumente la velocidad de la separación del sólido con el líquido.

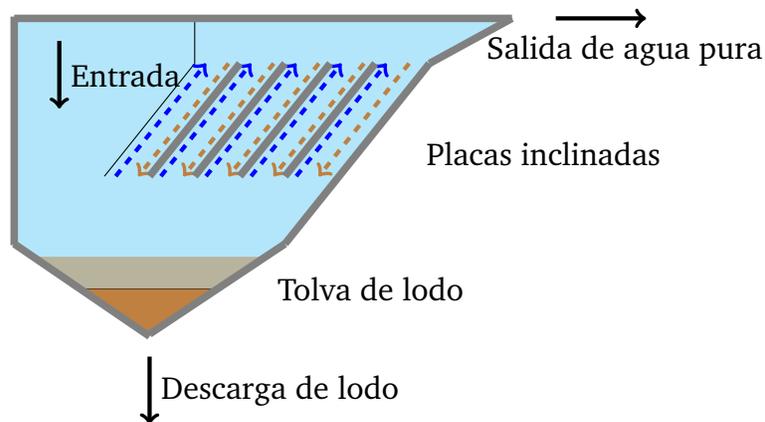


Figura 1.1: Esquema ilustrativo de un sedimentador lamelar

Enfocados únicamente en un par de placas contiguas se observa que el asentamiento de las partículas se puede modelar como un proceso de sedimentación mediante gravitación ocurrien-

do en un tubo inclinado en un ángulo idéntico al de las placas, donde la cara lateral inferior del tubo representa a la placa en donde las partículas comienzan a asentarse y la cara lateral superior como la placa en la que se produce un flujo de agua limpia en dirección hacia arriba.

Una vez asumiendo que este esquema permite modelar de manera correcta el asentamiento de las partículas entre las placas, el desafío de acelerar el proceso nos conduce a pensar que condiciones operacionales se podrían asumir para cumplir con el objetivo.

Dado que el momento lineal para la mezcla puede ser modelado a través de una ecuación de Stokes y este, a su vez, a través de la aproximación de Boussinesq dejar de ser únicamente dependiente de la concentración de la pulpa sino que además depender de las distintas temperaturas acopladas a las paredes del sistema. Así nace la opción de que un cambio de temperatura en las fronteras del nuevo dominio pueden provocar cambios significativos en como evoluciona la separación sólido-liquido.

Enfocado en el fenómeno de convección natural en cavidades se ve que un aumento de temperatura en alguna sección del fluido produce un cambio de densidad en el mismo que tiene como consecuencia una circulación dentro de la cavidad. Con esto en consideración, la idea de que al calentar la cara superior del tubo se logrará calentar el flujo de agua limpia que fluye hacia arriba pegado a esa cara, provocando un aumento en la circulación del mismo, gana bastante terreno como una solución al desafío. Sin embargo, no hay que olvidar que las concentraciones de pulpa influirán en la capacidad de conducir y difundir el calor, es por eso que tener en cuenta los distintos minerales y el equipos que se usa para la sedimentación serán fundamental con el fin de no influenciar en demasía el proceso o dañar el equipo con un exceso de calor. Tanto el efecto Boycott como la aproximación de Boussinesq han sido ampliamente estudiado, diversos modelos matemáticos y esquemas numéricos para la resolución de los mismos se han presentado a través de los años. No obstante un esquema numérico que permita resolver el acoplamiento de ambos sistemas no ha sido presentado aún.

## 1.1. Estado del arte

Cuando Boycott nota que la sangre ingresada en tubos estrechos inclinados sedimentaba más rápido que si esta estuviese en un tubo vertical, presenta distintos experimentos que consisten en variaciones en los ángulos de inclinación de los tubos, además de las dimensiones de los mismos para corroborar este fenómeno. Al comprobar que tanto el ángulo de inclinación como las dimensiones de los tubos influyen en la velocidad de la sedimentación. Boycott, creyendo que este fenómeno ya era conocido de otra forma, pide que alguien le explique el porque del mismo [4] .

Siguiendo la línea de Boycott, experimentos realizados por Pearce [21], Graham & Lama [10], Oliver & Jenson [19], Zahavi & Rubin [33] y Acrivos & Herbolzheimer [1] reafirmaron el fenómeno que presenta Boycott observaron además que la concentración inicial de la mezcla en

estudio juega un papel fundamental en la velocidad de la sedimentación.

Ponder [22] además de Nakamura & Nuroda [18] desarrollan la teoría PNK, la cual establece que la tasa de sedimentación de una mezcla homogénea en suspensión dentro de un recipiente inclinado será determinada por la velocidad de sedimentación  $v_{\text{set}}$  multiplicada por el área del recipiente disponible para el asentamiento.

Kynch [13] bajo la suposición de que la velocidad local relativa sólido-liquido es una función que depende únicamente de la concentración volumétrica de los sólidos  $\phi$ , lo cual equivale a decir  $v_{\text{set}} = v_{\text{set}}(\phi)$  para un proceso de sedimentación por lotes en una columna cerrada, establece que el conocimiento de la función  $f_{\text{bk}}$  es suficiente para poder determinar como es el proceso.

Con el fin de modelar la velocidad de asentamiento de las partículas en suspensión, Richardson & Zaki [25], haciendo uso de la velocidad de sedimentación de una partícula en un medio infinito, proponen una expresión que causa un inconveniente al momento de comparar con los resultados experimentales. Siguiendo con los intentos por modelar la velocidad de asentamiento y usando lo realizado por Richardson & Zaki, Michael & Bolger [15] proponen un nuevo modelo que incorpora como parámetro la concentración máxima del sólido.

Por su parte Acrivos & Herbolzheimer [1] estudian el proceso de sedimentación en tanques de sedimentación inclinados, explicando claramente como es que este proceso se lleva a cabo y porque la ocurrencia de algunos fenómenos.

Extendiendo su trabajo anterior [16], S. J. McCaffery et al. [17] presentan un modelo transiente bidimensional para predecir computacionalmente el comportamiento de las partículas de sólido en un canal inclinado durante un típico tratamiento de separación hidráulica.

Aplicando supuestos constitutivos seguidos por un análisis dimensional para la ecuación de la masa y momento lineal de la componente sólida y líquida, Bürger, Wendland & Concha [7] presentan un modelo de ecuaciones para el proceso de sedimentación consolidación bajo el efecto de la gravedad.

En lo que respecta a técnicas de resolución numérica, Latsa, Assimacopoulos, Stamou & Markatos [14] usan esquemas del tipo upwind para la resolución de problemas de sedimentación consolidación en tanques inclinados, Wan [32] propone un método híbrido entre elementos finitos y volúmenes finitos para la simulación de dos flujos inmiscibles, Kleine & Reddy [12] desarrollan un método de elementos finitos del tipo  $\kappa - \epsilon$  con el fin de conservar la masa del sistema, en [17] hacen uso de un esquema de Godunov complementado por una formulación de volúmenes de control iterativo, Bürger et al. [5] desarrollan un método multiresolución acompañado por un método de volúmenes finitos, Bürger et al. [6] exponen una formulación estabilizada de EFV para el proceso de sedimentación consolidación, Ruiz & Lunati [27] presentan un método discontinuo de elemento de volumen finito.

Ostrach [20] presenta un detallado análisis en lo que respecta la convección natural en cavidades, debido a la gran variedad de parámetros que tuvo que considerar tanto para el análisis

teórico como para el experimental concluyó que el fenómeno de convección natural en cavidades es un fenómeno de una naturaleza extremadamente compleja.

En lo que respecta simulaciones numéricas del fenómeno de convección natural, Christon et al. [8] a fin de buscar estimar con la mejor precisión posible distintos parámetros que son fundamentales para el proceso de convección natural desarrollan junto a sus colaboradores métodos numéricos de elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes Finitos que simulan el proceso. Con objetivos similares, Gang et al. [11] realizan simulaciones del proceso de convección salvo que en esta ocasión, el recipiente que contiene el fluido se encuentra inclinado.

Reyes et al. [23] estudian la sedimentación de minerales en suspensión en recipientes inclinados asistidos por calor. Para este propósito, haciendo uso de OpenFoam realizan simulaciones numéricas bidimensionales para distintas condiciones operacionales. Establecen que el tamaño de las partículas y la concentración inicial afectan directamente en el proceso de sedimentación.

## Marco teórico

### 2.1. Sedimentación inclinada

El estudio teórico del proceso de sedimentación en contenedores inclinados ha sido ampliamente estudiada desde los trabajos seminales que dan origen a la teoría PNK (Ponder, 1925 y Nakamura & Kuroda, 1937; [18, 22]; ver también [28, 30]). En dicha teoría, bajo ciertos supuestos, se postula que la velocidad de descenso de la interfase líquido claro-suspensión  $U(t)$  está determinada por la relación

$$U(t) = V(\phi) \left( \frac{b}{\cos \theta} + H(t) \tan \theta \right),$$

donde  $\phi$  es la fracción volumétrica de sólidos,  $V(\phi)$  es la velocidad de sedimentación obstaculizada de manera vertical, dada por ejemplo por la expresión propuesta por Richardson & Zaki [25],  $V(\phi) = v_{St}(1 - \phi)^{n_{RZ}}$ ,  $v_{St}$  es la velocidad de sedimentación de una partícula individual en un medio infinito (velocidad de Stokes),  $b$  es el ancho del recipiente,  $\theta$  el ángulo de inclinación,  $n_{RZ}$  un parámetro experimental y  $H(t)$  la altura de la interfaz (ver Figura 2.1).

McCaffery et al. [17], basándose en consideraciones de análisis dimensional y suposiciones constitutivas, proponen que el fenómeno de sedimentación inclinada entre planos paralelos podía ser bien descrito por una ecuación de Stokes para la conservación de momentum lineal para la mezcla, acoplado con las ecuaciones de conservación de masa para la fase sólida (que se traduce en una ley de conservación no lineal) y para la mezcla (ecuación de continuidad). El

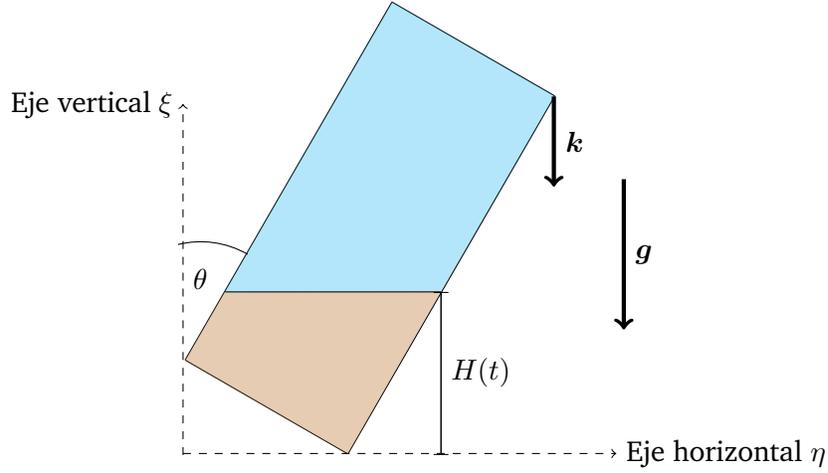


Figura 2.1: Esquema ilustrativo de teoría PNK

sistema planteado es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}\phi + \phi V(\phi)\mathbf{k}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (2.2)$$

$$-\nabla \cdot (\mu(\phi) (\nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T)) + \lambda \nabla p = \lambda \Delta \rho^* \phi \mathbf{k}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{q}$  es la velocidad volumétrica de la mezcla,  $\mu(\phi)$  su viscosidad,  $\mathbf{k}$  es un vector unitario alineado con la gravedad y  $\Delta \rho^*$  y  $\lambda$  son parámetros adimensionales, los cuales están dados por

$$\Delta \rho^* = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}, \quad \lambda = \frac{D^2 g \rho_f}{v_{St} \mu_f},$$

donde  $D$  es un largo característico del problema. Estos autores resolvieron el sistema utilizando un esquema del tipo Godunov. Posteriormente, Bürger et al. [5] refinaron los resultados numéricos encontrados por McCaffery et al. [17] utilizando un método de multiresolución por volúmenes finitos. En la misma línea, Ruiz-Baier y Torres [26], utilizando la técnica de Volúmenes-Elementos Finitos, estudiaron la sedimentación inclinada, adicionando en la ecuación (2.3) el término convectivo  $(\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q})$ , obteniendo una ecuación del tipo Navier-Stokes para la cantidad de movimiento.

Sin considerar simplificaciones, el sistema de ecuaciones completo se escribe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}\phi + \phi V(\phi)\mathbf{k}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \rho(\phi) \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) &= -\nabla p + \rho(\phi)\mathbf{g} + \nabla \cdot \left( \mu(\phi) \left( \nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T \right) \right),\end{aligned}$$

donde  $\rho(\phi)$  es la densidad de la mezcla definida por  $\rho(\phi) = \phi\rho_s + (1 - \phi)\rho_f$ .

## 2.2. Convección natural en cavidades

La otra arista del problema, el fenómeno de convección natural en cavidades, ha atraído la atención de innumerables investigadores a lo largo de años [2, 8, 29] (la lista está lejos de ser completa). En este fenómeno, el movimiento del fluido es producido por la diferencia de densidad generada al modificar la temperatura de alguna de las superficies que contienen el fluido (ver Figura 2.2).

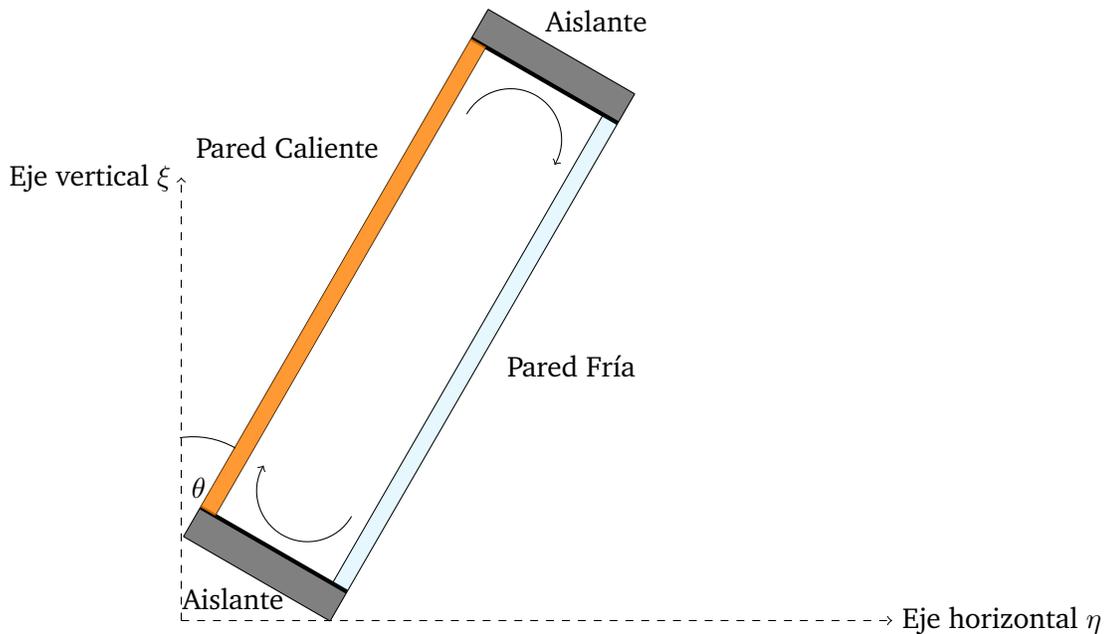


Figura 2.2: Esquema ilustrativo del fenómeno de convección natural

Considerando válida la aproximación de Boussinesq,  $\rho(T) = \rho_0 - \beta\rho_0(T - T_r)$ , donde  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  y  $\rho_0 = \rho(T_r)$ , las ecuaciones gobernantes para la conservación de masa, momentum y

energía son [3]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) &= -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} + \nabla \cdot \left( \mu(T) \left( \nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T \right) \right) \\ &\quad - \rho_0 \mathbf{g} \beta (T - T_0), \\ \rho_0 c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T \right) &= \kappa \nabla^2 T.\end{aligned}$$

Aquí  $T$  es la temperatura de la mezcla,  $T_r$  la temperatura de referencia,  $\kappa$  el coeficiente de transferencia de calor por conducción y  $c_p$  la capacidad calórica del fluido.

El estudio de la sedimentación en recipientes inclinados acoplado al fenómeno de convección natural ha sido estudio recientemente por Reyes et al. [24]. En dicho trabajo se resuelve el sistema de ecuaciones gobernantes dado por las ecuaciones de conservación de masa, movimiento y energía interna para la fase líquida y sólida utilizando el software de mecánica de fluidos computacional Open Foam.

El sistema de ecuaciones gobernante propuesto por Reyes et al. [24] es equivalente al obtenido considerando las ecuaciones de conservación masa para la mezcla y la fase sólida, conservación de momentum lineal y energía para la mezcla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}\phi + \phi V(\phi)\mathbf{k}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \rho(\phi) \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) &= -\nabla p + \rho(\phi, T)\mathbf{g} + \nabla \cdot \left( \mu(\phi, T) \left( \nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T \right) \right), \\ \rho(\phi)c_p(\phi) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T \right) &= \kappa(\phi)\nabla^2 T.\end{aligned}$$

La aproximación de Bousinessq en este caso se interpreta como

$$\begin{aligned}\rho(\phi, T) &= \rho(\phi) + \frac{\partial \rho(\phi, T_r)}{\partial T} (T - T_r) \\ &= \rho(\phi) + \frac{\partial (\phi \rho_s + (1 - \phi) \rho_f)}{\partial T} (T - T_r) \\ &= \rho(\phi) + (1 - \phi) \frac{\partial \rho_f}{\partial T} (T - T_r) \\ &= \rho(\phi) - (1 - \phi) \rho_f \beta_f (T - T_r),\end{aligned}$$

donde el coeficiente de expansión térmica del sólido  $\beta_s$  se considera despreciable. Luego el

sistema queda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}\phi + \phi V(\phi)\mathbf{k}) &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\
\rho(\phi) \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) &= -\nabla p + \rho(\phi)\mathbf{g} - (1 - \phi)\rho_f\beta_f(T - T_r)\mathbf{g} \\
&\quad + \nabla \cdot \left( \mu(\phi, T) \left( \nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T \right) \right), \\
\rho(\phi)c_p(\phi) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T \right) &= \kappa(\phi)\nabla^2 T.
\end{aligned}$$

El modelo propuesto consiste en tres ecuaciones escalares, una ecuación vectorial para cinco incógnitas  $\mathbf{q}, p, T, \phi$ . Este sistema debe ser cerrado con relaciones constitutivas adecuadas y físicamente consistentes para  $V(\phi), \rho(\phi), \mu(\phi), \kappa(\phi), c_p(\phi)$ . Se supondrán válidas las siguientes relaciones y aproximaciones:

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= v_{St}(1 - \phi)^{n_{RZ}}, \\
\mu(\phi, T) &= \mu_f(1 - \phi)^{-\alpha}, \alpha \geq 0, \\
\kappa(\phi, T) &= \kappa_f(1 - \phi) + \kappa_s\phi, \\
c_p(\phi, T) &= c_{pf}(1 - \phi) + c_{ps}\phi,
\end{aligned}$$

### 2.2.1. Análisis dimensional

Para el adimensionamiento de las ecuaciones gobernantes se consideran las definiciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{r}^*L, & \mathbf{q} &= \mathbf{q}^*v_{St}, & t &= \frac{L}{v_{St}}t^*, & \rho &= \rho_f\rho^*, & \mu &= \mu_f\mu^*, \\
\kappa &= \kappa_f\kappa^* & c_p^* &= \frac{c_p}{c_{pf}}, & p^* &= \frac{p}{\rho_f g L} - x^* \cos \theta - y^* \sin \theta, \\
T^* &= \frac{T - T_r}{T_h - T_c}, & \Delta\rho^* &= \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}, & \nabla^* &= L\nabla, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{v_{St}}{L} \frac{\partial}{\partial t^*},
\end{aligned}$$

donde  $L$  es un largo característico del problema, el subíndice f indica que la propiedad corresponde al fluido y el superíndice \* denota una variable adimensional. Las ecuaciones adimensionales gobernantes quedan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{q}^* \phi + \phi(1 - \phi)^{n_{RZ}} \mathbf{k}) &= 0, \\
\nabla^* \cdot \mathbf{q}^* &= 0, \\
\frac{\rho_f v_{St} L}{\mu_f} (1 + \phi \Delta \rho^*) \left( \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t^*} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla^* \mathbf{q}^* \right) &= - \frac{gL^2 \rho_f}{\mu_f v_{St}} (\nabla^* p^* - \Delta \rho^* \phi \mathbf{k} + (1 - \phi) \beta_f \Delta T T^* \mathbf{k}) \\
&\quad + \nabla^* \cdot \left( \mu^*(\phi) (\nabla^* \mathbf{q}^* + (\nabla^* \mathbf{q}^*)^T) \right), \\
\frac{\rho_f v_{St} L}{\mu_f} (1 + \phi \Delta \rho^*) \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{(1 + \phi \Delta \kappa^*)}{(1 + \phi \Delta c_p^*)} \nabla^{*2} T^*,
\end{aligned}$$

donde

$$Pr = \frac{\mu_f c_p}{\kappa_f}; \quad \Delta \kappa^* = \frac{\Delta \kappa}{\kappa_f}; \quad \Delta c_p^* = \frac{\Delta c_p}{c_{pf}}; \quad \Delta T = T_h - T_c.$$

Si incorporamos el número de Reynolds de sedimentación

$$Re = \frac{\rho_f v_{St} d}{\mu_f},$$

donde  $d$  es el diámetro de la partícula, las ecuaciones de conservación de momentum lineal y energía quedan

$$\begin{aligned}
Re (1 + \phi \Delta \rho^*) \left( \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t^*} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla^* \mathbf{q}^* \right) &= - \frac{d}{L} \frac{gL^2 \rho_f}{\mu_f v_{St}} (\nabla^* p^* - \Delta \rho^* \phi \mathbf{k} + (1 - \phi) \beta_f \Delta T T^* \mathbf{k}) \\
&\quad + \frac{d}{L} \nabla^* \cdot \left( \mu^*(\phi) (\nabla^* \mathbf{q}^* + (\nabla^* \mathbf{q}^*)^T) \right), \\
Re (1 + \phi \Delta \rho^*) \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{d}{L} \frac{(1 + \phi \Delta \kappa^*)}{(1 + \phi \Delta c_p^*)} \nabla^{*2} T^*,
\end{aligned}$$

Luego, haciendo uso de lo propuesto por Unwin [31] podemos establecer un modelo en el cuál la derivada material de la velocidad no es considerada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{q}^* \phi + \phi(1 - \phi)^{n_{RZ}} \mathbf{k}) &= 0, \\
\nabla^* \cdot \mathbf{q}^* &= 0, \\
-\nabla^* \cdot \left( \mu^*(\phi) (\nabla^* \mathbf{q}^* + (\nabla^* \mathbf{q}^*)^T) \right) &= - \lambda (\nabla^* p^* - \Delta \rho^* \phi \mathbf{k} + (1 - \phi) \beta_f \Delta T T^* \mathbf{k}), \\
\frac{\rho_f v_{St} L}{\mu_f} (1 + \phi \Delta \rho^*) \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{Pr} \frac{(1 + \phi \Delta \kappa^*)}{(1 + \phi \Delta c_p^*)} \nabla T^* \right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde  $\lambda$  es el parámetro adimensional definido como

$$\lambda = \frac{gL^2\rho_f}{\mu_f v_{St}}.$$

Podemos ver que este modelo es idéntico al presentado por McCaffery [17] con la diferencia que aquí será complementado por la ecuación del calor.

Para el problema de sedimentación en el área de procesamiento de minerales es usual utilizar [7]:

$$\begin{aligned} v_{St} &= 10^{-4} \text{ m/s}, & \nu_f &= 10^{-6}, & \mu &= 10^{-4} \text{ Pa s}, \\ g &= 10 \text{ m/s}^2, & \text{Pr} &= 7, & L &= 1 \text{ m}, & \text{Re} &= 10^{-2}, \end{aligned}$$

## Descripción del proceso

El proceso de sedimentación, espesamiento o clarificación, consiste en la operación de separar parte del líquido de una suspensión para obtener un flujo de agua clara o líquido más puro y por otro lado materia más densa obtenida de la suspensión.

El mecanismo que se considera en este trabajo es sedimentación mediante fuerzas gravitacionales, las cuales atraerán a las partículas más densas en dirección hacia abajo (ya sea el suelo o centro de la tierra).

Se denomina sedimentador o tanque al recipiente que contiene la suspensión y en donde se llevara a cabo el proceso de separación sólido-líquido, este último está compuesto por dos paredes aisladas térmicamente y dos paredes expuestas a distintas temperaturas, una a temperatura ambiental y la otra a una temperatura superior.

Este sedimentador se considera con sección transversal horizontal de radio constante, una proporción del largo con el ancho equivalente a 4:1 y sometido a un ángulo de inclinación  $\theta$  con respecto a la vertical.

### 3.1. Supuestos y ecuaciones del problema

La ecuación de velocidad es complementada por una condición de no deslizamiento en la frontera. En lo que respecta la ecuación de la masa, inicialmente consideraremos una densidad constante y uniforme en todo el dominio, además de una condición de flujo cero en la frontera. Finalmente, la ecuación de temperatura tendrá como condición de borde un valor  $T_c$  tanto para la cara inferior como para el interior de la mezcla y  $T_h$  para la cara del recipiente que mira hacia abajo.

Con el fin de que nuestro modelo sea física y matemáticamente razonable se harán los siguientes supuestos

1. La temperatura ambiente se considera de 20°C.

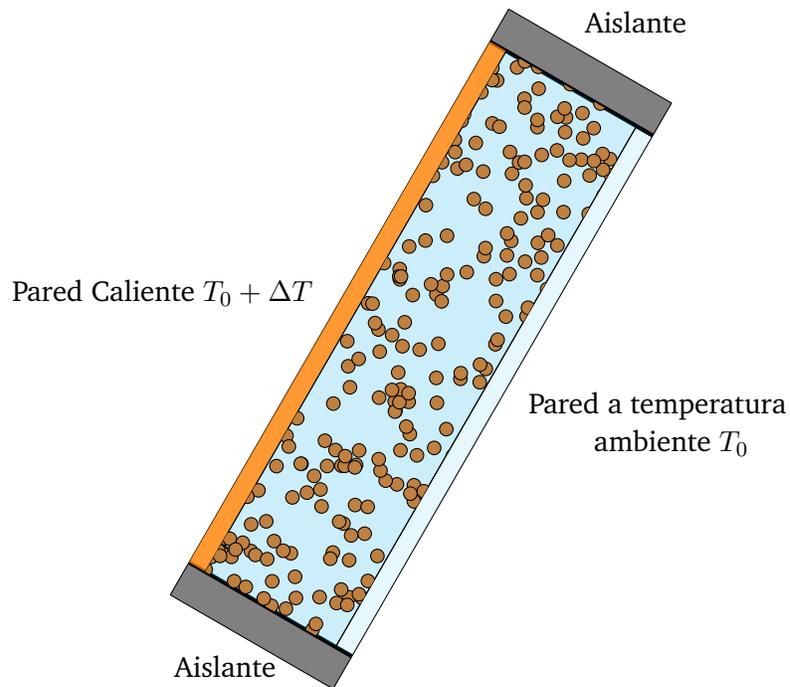


Figura 3.1: Condiciones iniciales del sistema

2. La temperatura aplicada al sistema se hace de manera uniforme en toda la cara.
3. La temperatura que sea aplicada al sistema no provoca daño al material del recipiente y tampoco al contenido del mismo, es decir, evitaremos calentar o enfriar en demasía la mezcla.
4. La concentración máxima que alcanza nuestro sistema es de  $1 - 10^{-10}$  para que así nuestra viscosidad cinemática no se indetermina.
5. La velocidad de sedimentación se aproximará a cero cuando la concentración sea la máxima.

## Esquema numérico

Para resolver numéricamente (2.4) se discretiza el dominio  $\Omega$  en  $N_x \cdot N_y$  celdas de medida  $\Delta x \times \Delta y$  las cuales generan una maya definida por  $\mathcal{T}$  que cumple con todos los supuestos de una malla admisible [9].

Además, se definen

$$x_{i\pm 1/2} := (i \pm 1/2)\Delta x \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N_x - 1$$

y

$$y_{j\pm 1/2} := (j \pm 1/2)\Delta y \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_y - 1$$

como los valores en los cuales se encuentran las fronteras de la celda  $C_j$  con centro  $(x_i, y_j)$ , esta información es necesaria ya que las incógnitas que presenta (2.4) serán calculadas en los centros de cada celda.

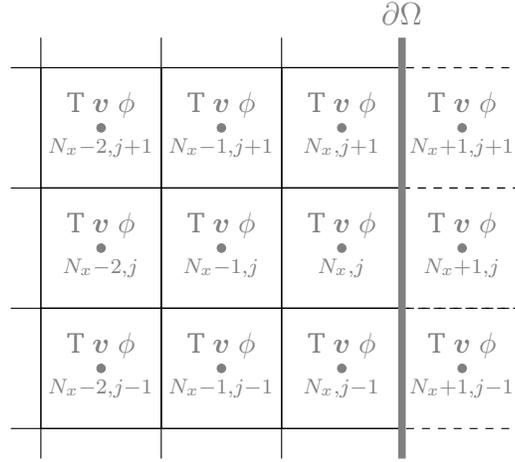


Figura 4.1: Discretización del dominio  $\Omega$  en volúmenes de control  $K_{i,j}$

Como podemos ver en 4.1 nuestras incógnitas serán calculadas en el centro de cada uno de los volúmenes de control. Además, con el fin de imponer las condiciones de borde se incorpora una celda extra a continuación de cada una de las fronteras que presenta nuestro dominio.

#### 4.1. Aproximación numérica para la ecuación de la concentración

El método numérico que utilizaremos para la resolución de la ecuación de la masa se basa en una formulación de Volúmenes Finitos. Denotamos por  $\bar{\phi}(t)$  como el promedio de  $\phi$  sobre la celda  $K$  en el tiempo  $t$ , en otras palabras

$$\bar{\phi} := \frac{1}{|K|} \int_K \phi(x, t) dx, \quad \text{donde} \quad |K| := \int_K dx = \Delta x \Delta y \quad (4.1)$$

Se denota por  $\bar{\phi}^n$  como la aproximación de  $\bar{\phi}(t_n)$ , donde  $t_n = n\Delta t$ . Siguiendo lo propuesto por McCaffery [17] el esquema numérico elegido para la resolución de la ecuación bidimensional de concentración es un esquema conservativo de Godunov. Para esto notamos que podemos reescribir la ecuación de manera conservativa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} = 0, \quad (4.2)$$

donde  $F^x$  y  $F^y$  son las componentes  $x$  e  $y$  del vector de flujo  $\mathbf{F}$ , respectivamente. Los cuales son definidos por

$$\begin{aligned} F^x &= \phi q_x + \phi(1 - \phi)^{n_{RZ}} \cos \theta, \\ F^y &= \phi q_y + \phi(1 - \phi)^{n_{RZ}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La resolución de la ecuación será mediante el método *fractional step*, el cual consiste en resolver la ecuación para una dimensión en la primera mitad del paso temporal ( $t_{n+1/2} := (n + 1/2)\Delta t$ ), es decir, primero se resuelve

$$\phi_{i,j}^{n+1/2} = \phi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2,j}^x - F_{i-1/2,j}^x \right) \quad (4.4)$$

y una vez con la solución de esta ecuación se resuelve la ecuación para la dimensión restante en lo que resta del paso temporal:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( F_{i,j+1/2}^y - F_{i,j-1/2}^y \right). \quad (4.5)$$

Así el valor medio que toma la concentración en cada una de las celdas para el siguiente instante de tiempo  $t_n$ .

Finalmente, el flujo de masa que pasa por cada una de las caras de las celdas es aproximado por

$$F_{i+1/2,j}^x = \begin{cases} \min_{\phi_{i,j}^n \leq \phi \leq \phi_{i+1,j}^n} F^x(\phi) & \text{si } \phi_{ij}^n \leq \phi_{i+1,j}^n, \\ \max_{\phi_{i,j}^n \geq \phi \geq \phi_{i+1,j}^n} F^x(\phi) & \text{si } \phi_{ij}^n > \phi_{i+1,j}^n, \end{cases}$$

$$F_{i,j+1/2}^y = \begin{cases} \min_{\phi_{i,j}^{n+1/2} \leq \phi \leq \phi_{i,j+1}^{n+1/2}} F^y(\phi) & \text{si } \phi_{ij}^{n+1/2} \leq \phi_{i,j+1}^{n+1/2}, \\ \max_{\phi_{i,j}^{n+1/2} \geq \phi \geq \phi_{i,j+1}^{n+1/2}} F^y(\phi) & \text{si } \phi_{ij}^{n+1/2} > \phi_{i,j+1}^{n+1/2}, \end{cases}$$

conocidos como los flujos numéricos de Godunov.

Al establecer la condición de frontera de flujo cero, es decir, que no hay pérdida ni ganancia de masa dentro del dominio, a las celdas exteriores que comparten una cara con la frontera que se encuentra en dirección al suelo se les asigna un valor de concentración  $\phi = 1$  y al resto de las celdas exteriores un valor de concentración  $\phi = 0$ . En otras palabras, para imponer la condición de flujo cero se imponen unas condiciones de Dirichlet en cada una de las caras del dominio  $\Omega$ .

## 4.2. Aproximación numérica del sistema de Stokes

Las incógnitas de nuestro sistema son el vector de velocidades  $\mathbf{q}$  y la presión  $p$  en cada uno de los volúmenes de control  $\Omega_{i,j} \in \mathcal{T}$ . Para simplificar la notación denotamos  $K = \Omega_{ij}$  como el volumen de control genérico,  $\sigma = K|K^*$  como la arista común que comparte el volumen de control  $K$  con su vecino  $K^*$ .  $\xi$  como el conjunto de aristas,  $m_\sigma$  como la medida de la arista,  $d_{K|K^*} = |x_{K^*} - x_K|$ ,  $\tau_\sigma = m_\sigma/d_\sigma$  y  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  como el vector normal unitario hacia el exterior de  $K$  que se origina en  $\sigma$ . El conjunto de aristas de  $K$  se denota  $\xi_K$ , el conjunto de aristas interiores y exteriores se denotan  $\xi_{\text{int}}$  y  $\xi_{\text{ext}}$  respectivamente, además denotaremos por  $H_{\mathcal{T}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  el

espacio de funciones constantes a trozos en cada volumen de control.

#### 4.2.1. Discretización de los terminos

Los esquemas de volúmenes finitos son ecuaciones balanceadas discretas con una adecuada aproximación de los flujos. Aquí introduciremos operadores discretos para el divergente y gradiente que necesitamos para modelar (2.4).

Para todo  $w$  en  $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$  y para todo  $K$  en  $\mathcal{T}$ , definimos  $w_K$  como el valor que toma  $w$  sobre el volumen de control  $K$ . Luego, el gradiente de  $w$  puede ser escrito como la diferencia de valor que tiene  $w$  con el valor que toma en cada vecino del volumen de control. Es decir podemos definir el operador del gradiente discreto como  $\nabla_{\mathcal{T}} : H_{\mathcal{T}}(\Omega) \rightarrow [H_{\mathcal{T}}(\Omega)]^d$

$$(\nabla_{\mathcal{T}} w)_K = \frac{1}{m_K} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \frac{m_{K|L}}{d_{K|L}} \frac{x_L - x_K}{2} (w_L - w_K)$$

para todo  $K$  en  $\mathcal{T}$  y  $w$  en  $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ . Donde  $m_K$  es la medida del volumen de control  $K$ ,  $\mathcal{N}_K$  es el conjunto de volúmenes de control que comparten una arista con  $K$  y el término  $1/2$  se elige para asegurar una convergencia de orden 2 en lo que respecta la aproximación de los flujos.

Luego, el operador adjunto del gradiente discreto define la divergencia  $\text{div}_{\mathcal{T}} : [H_{\mathcal{T}}(\Omega)]^d \rightarrow H_{\mathcal{T}}(\Omega)$

$$\text{div}_{\mathcal{T}}(w)(x) = \frac{1}{m_K} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \frac{m_{K|L}}{d_{K|L}} \frac{x_L - x_K}{2} \cdot (w_K + w_L)$$

Una vez con estos operadores definidos se puede asegurar que para  $(v, w)$  en  $(H_{\mathcal{T}}(\Omega))^2$  el producto interior correspondiente a las condiciones de contorno de Neumann está bien puesto:

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \frac{m_{K|L}}{d_{K|L}} (v_L - v_K)(w_L - w_K) \quad (4.6)$$

y para las condiciones de contorno tipo Dirichlet:

$$[v, w]_{\mathcal{T}} = \langle v, w \rangle_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{m_{\sigma}}{d_{K,\sigma}} v_K w_K \quad (4.7)$$

Dado que nuestro esquema considera una viscosidad variable  $\mu = \mu(\phi)$ , reescribimos (4.6)-(4.7) de tal manera que la viscosidad en cada volumen esté dada por:

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{T}, \mu} = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \frac{m_{K|L}}{d_{K|L}(\mu_K + \mu_L)} (v_L - v_K)(w_L - w_K) \quad (4.8)$$

para el producto interno con condiciones de Neumann y

$$[v, w]_{\mathcal{T}, \mu} = \langle v, w \rangle_{\mathcal{T}, \mu} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{m_\sigma}{d_{K, \sigma}} \mu_K v_K w_K \quad (4.9)$$

para el producto interno con condiciones de Dirichlet.

#### 4.2.2. Esquema para la solución de la ecuación de Stokes

Con el propósito de aplicar un método estabilizado para la presión seguiremos lo que realizan Bürger et al. [5], incorporamos un término  $\eta^2 \Delta p$  en la ecuación de continuidad, donde  $\eta$  es un parámetro de regularización mayor que cero. Además, asumiremos que  $\mu(\phi)$  es mayor que cero,  $\mathbf{f}$  está en  $[L^2(\Omega)]^2$  y consideraremos el siguiente sistema de Stokes:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mu(\phi) \nabla \mathbf{q}^\eta) + \lambda \nabla p^\eta &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot \mathbf{q}^\eta &= \eta^2 \Delta p^\eta && \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{q}^\eta &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

el cual es una perturbación del esquema original para  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\eta$  y  $p = p^\eta$ . Podemos ver que para valores acotados de  $p^\eta$  la divergencia de  $\mathbf{q}^\eta$  se aproximará a cero a medida que  $\eta$  tienda a cero.

Se supone que la viscosidad  $\mu(\phi)$  es dada por la ley generalizada de Roscoe-Brinkman  $\mu(\phi) = (1 - \phi)^{-\beta}$ . El termino forzante  $\mathbf{f}$  captura la variación de densidad local de la suspensión, es decir, este modela el movimiento que tiene la mezcla durante el proceso. Este termino es dado por:

$$\mathbf{f} = -\lambda (-\Delta \rho^* \phi + (1 - \phi) \beta_f \Delta T T^*) (\cos \theta, \sin \theta)^T$$

Así, la aproximación del problema de Stokes consiste en buscar  $\mathbf{q} \in E_{\mathcal{T}}(\Omega), p \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$  con  $\int_{\Omega} p(x) dx = 0$  tales que

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}, \mathbf{u}]_{\mathcal{T}, \mu} - \lambda \int_{\Omega} p(x) \operatorname{div}_{\mathcal{T}} \mathbf{u}(x) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathcal{T}} \mathbf{q}(x) q(x) &= -\eta^2 \langle p, q \rangle_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

para todo  $\mathbf{u}$  en  $[H_{\mathcal{T}}(\Omega)]^2$  y  $q$  en  $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ . El término  $\eta$  es un parámetro que se debe ajustar con el fin de obtener un balance satisfactorio entre precisión y estabilidad.

Luego, integrando sobre cada volumen de control  $K$  en  $\mathcal{T}$  el sistema se aproxima como

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{K, \sigma} + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K, \sigma} (p_{K^*} - p_K) &= \mathbf{f}_K, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K, \sigma} (v_K + v_{K^*}) - \eta^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \tau_\sigma (p_{K^*} - p_K) &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $\sigma$  es la arista que comparte  $K$  con uno de sus vecinos  $K^*$ . También definimos

$$\mathbf{A}_{K,\sigma} := \frac{1}{2} m_\sigma \mathbf{n}_{K,\sigma}$$

para todo  $\sigma$  en  $\mathcal{E}_K$ , suponiendo que

$$\mathbf{F}_{K,\sigma} \approx - \int_\sigma \mu_K \nabla \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma$$

con el fin de establecer que el esquema es conservativo, para todo  $K$  en  $\mathcal{T}$  definimos

$$\mathbf{F}_{K,\sigma} := \begin{cases} m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K^*}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K^*} d_{K^*,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_{K^*}) & \text{si } \sigma = K|K^* \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} \mathbf{q}_K & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, \end{cases}$$

una vez con todo esto definido notamos que encontrar nuestras soluciones se reduce a la resolución de un sistema lineal suplementado por la relación

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m_K p_K = 0$$

que será agregado al sistema incorporando una fila y una columna. Esta medida implica la aparición de una nueva incógnita que no usaremos tras la resolución del sistema.

### 4.3. Método de resolución de la ecuación del calor

En esta sección se presenta la formulación en volúmenes finitos para la resolución de la ecuación del calor presente en el sistema, dado que se busca desarrollar un método que sea lo más óptimo posible se evitará trabajar con condiciones CFL que generen un gasto computacional elevado, esto motiva la idea de emplear un método semi-implícito evitando la condición CFL que impone un menor tamaño del paso temporal.

Como se dijo anteriormente, la ecuación del calor bi-dimensional presente en (2.4) será resuelta con un método semi-implícito de volúmenes finitos. Es decir, en una primera instancia se resuelve de manera explícita la ecuación del transporte de temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T = 0 \quad (4.13)$$

una vez resuelta, la solución de esta se utilizará para resolver de manera implícita la difusión de la temperatura en el medio

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4.14)$$

cuya solución será el perfil de temperaturas del dominio en el instante  $t$ .

Al elegir resolver de manera explícita la ecuación conductiva de la temperatura, la condición CFL establece un instante de tiempo de orden menor al que se necesitaría si se resuelve de manera explícita la difusión o la ecuación completa.

## 4.4. Aproximación numérica de la ecuación del calor

En este capítulo se presenta la formulación en Volúmenes Finitos y el método de resolución numérica que se utiliza con el fin de resolver de manera más eficiente posible la ecuación del calor.

Siguiendo con lo establecido anteriormente, las formulaciones se crean sobre una malla admisible y cada valor obtenido hace referencia al valor medio de la variable de interés en la celda, el cual se calcula en el centro de cada una de ellas.

### 4.4.1. Resolución método explícito

Para resolver (4.13) se hace uso de un método splitting en el que una aproximación del flujo tipo upwind que usa las velocidades medias entre celdas para aproximar la velocidad que hay en las caras compartidas por las celdas permite encontrar la solución  $T^{n+1/2}$ . Es decir, se comienza resolviendo

$$T_x^{n+1/2} = T^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1/2} - U_{i-1/2}) \quad (4.15)$$

donde  $T_x^{n+1/2}$  es la temperatura del dominio en el instante intermedio  $t = n + 1/2$  tras resolver la ecuación en la dirección del eje  $x$  y  $U_{i+1/2}$  es la aproximación numérica del flujo de temperaturas. A continuación, se resuelve esta ecuación para el flujo de temperaturas en el eje  $y$  considerando como condición inicial el valor obtenido tras resolver la ecuación para el eje  $x$ .

El perfil de temperaturas obtenido tras el splitting es el que ocurre en el instante intermedio, es decir,  $T^{n+1/2}$  y será utilizado para la resolución del método implícito.

### 4.4.2. Resolución método implícito

Como se enunció al comienzo del capítulo esta parte de la ecuación del calor sera resuelto a través de un método implícito. Es decir, se resuelve

$$T^{n+1} = T^{n+1/2} + \Delta t (D(\phi^{n+1})T^{n+1} + BC) \quad (4.16)$$

donde  $D(\phi^{n+1})$  es la matriz que describe el comportamiento de la difusión, la cual tiene similar estructura a la que se desarrolla para discretizar el término de difusión en la ecuación de Stokes, notar que esta matriz depende de la fracción de sólido en cada celda puesto que el coeficiente

de difusión del calor varía en cada una de las celdas. Además,  $BC$  es la matriz que impone las condiciones de contorno del problema.

## 4.5. Condición CFL

El esquema numérico propuesto para la resolución de la ecuación de la masa va a ser estable si se garantiza que la siguiente condición CFL se satisface

$$\text{máx} \{|\omega_{\text{máx}}^x|, |\omega_{\text{máx}}^y|\} \Delta t < \frac{1}{2} \text{mín}(\Delta x, \Delta y) \quad (4.17)$$

donde  $\omega_{\text{máx}}^x$  y  $\omega_{\text{máx}}^y$  son los máximos valores de la velocidad con que se propaga la onda en dirección  $x$  e  $y$ , respectivamente. Así, en cada paso de tiempo se debe calcular

$$\omega_{\text{máx}}^k = \left\{ \left| \frac{dF^k}{d\phi}(\phi_{ij}^n) \right| : 0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1 \right\}, \quad k = x, y \quad (4.18)$$

Por lo que el paso de tiempo  $\Delta t$  es elegido de manera adaptativa con el fin de cumplir la condición CFL en cada instante, en particular se considera

$$\Delta t_{\text{masa}} = \frac{\Delta y}{2(\omega_{\text{máx}} + 1)}, \quad \text{donde} \quad \omega_{\text{máx}} = \text{máx}\{|\omega_{\text{máx}}^x|, |\omega_{\text{máx}}^y|\} \quad (4.19)$$

Dado que el problema en el que se centra este trabajo incorpora a [17] una ecuación del calor del tipo advección difusión, surge la necesidad de establecer una nueva condición CFL para que el esquema sea estable.

La resolución de la ecuación del calor mediante un método semi-implícito presenta una única condición CFL que debe cumplirse para asegurar la estabilidad del método, esta se hace presente cuando se resuelve la ecuación de transporte de temperatura debido a la velocidad de la mezcla. Esta condición CFL dice que se debe cumplir la siguiente desigualdad

$$\Delta t_{\text{calor}} < \text{mín} \left\{ \frac{\Delta x}{\omega_{\text{máx}}^x}, \frac{\Delta y}{\omega_{\text{máx}}^y} \right\}$$

Por la tanto, se puede observar que la elección de  $\Delta t$  para cada instante de tiempo se puede elegir como el mínimo de entre los valores propuestos, en otras palabras

$$\Delta t \leq \text{mín}\{\Delta t_{\text{masa}}, \Delta t_{\text{calor}}\}$$

es la condición necesaria para asegurar la estabilidad del método numérico presentado para la resolución del sistema. Ya con la estabilidad del método asegurada, se puede resolver el sistema bajo las condiciones del medio que sean de interés.

## 4.6. Estrategia de acoplamiento

Ya con las estrategias de discretización presentadas para los tres sub-problemas presentados en el sistema completo (2.4), en esta sección se presenta la elección del proceso que se usa para el acoplamiento de los mismos. Para la formulación en Volúmenes Finitos del sistema sobre una malla admisible, el acoplamiento se lleva a cabo a través de una aproximación totalmente segregada, es decir.

- a) La condición inicial para la concentración  $\phi(0) = \phi_0$  y temperatura  $T(0) = T_0$  son especificadas.
- b) Conociendo el campo de concentración y temperatura en el tiempo  $t$ , se resuelve el sistema de Stokes.
- c) Conociendo la velocidad, la concentración y presión en el instante de tiempo  $t$ , se resuelve la ecuación hiperbólica para la concentración en el instante  $t + \Delta t$ .
- d) Conociendo la velocidad, concentración y presión en el instante de tiempo  $t$ , se resuelve la ecuación del calor en el instante  $t + \Delta t$ .
- e) Se reemplaza la concentración  $\phi(t)$  y temperatura  $T(t)$  por  $\phi(t + \Delta t)$ ,  $T(t + \Delta t)$  respectivamente. Se define  $t = t + \Delta t$ , y se repiten los pasos desde el b) al d) hasta que el tiempo final es alcanzado.

## Resultados numéricos

En este apartado se presentarán los distintos comportamientos del proceso de sedimentación inclinada con convección natural para distintos caso de interés obtenidos con el método numérico presentado anteriormente.

El objetivo de esta investigación se centra en encontrar la mejor combinación entre inclinación y temperatura con el fin de aumentar lo máximo posible la velocidad de sedimentación. Es por lo mismo que se analizarán distintos resultados obtenidos con distintas combinaciones de los parámetro de interés.

A continuación se presenta una tabla con los valores que tendrán las propiedades de los materiales utilizados en las simulaciones numéricas.

$\rho_f$	$1 \times 10^3$	$\text{kg/m}^3$
$\rho_s$	$2,650 \times 10^3$	$\text{kg/m}^3$
$\beta_f$	$2,07 \times 10^{-4}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$\kappa_s$	3	W/mK
$\kappa_f$	$5,8 \times 10^{-1}$	W/mK
$c_{ps}$	$7,41 \times 10^2$	J/kg
$c_{pf}$	4,18	J/kg
$\lambda$	$9 \times 10^3$	
$\eta$	$1 \times 10^{-5}$	

Cuadro 5.1: Valor de las propiedades físicas del sólido y fluido.

Los valores que corresponden a temperatura aplicada y ángulos de inclinación del tanque no se presentan en 5.1 debido a que son nuestras variables de interés.

## 5.1. Simulación numérica del test de Diehl

Para comenzar realizaremos una simulación numérica de un proceso de sedimentación consolidación en el cual durante el instante inicial, la masa se concentra en la zona superior del recipiente.

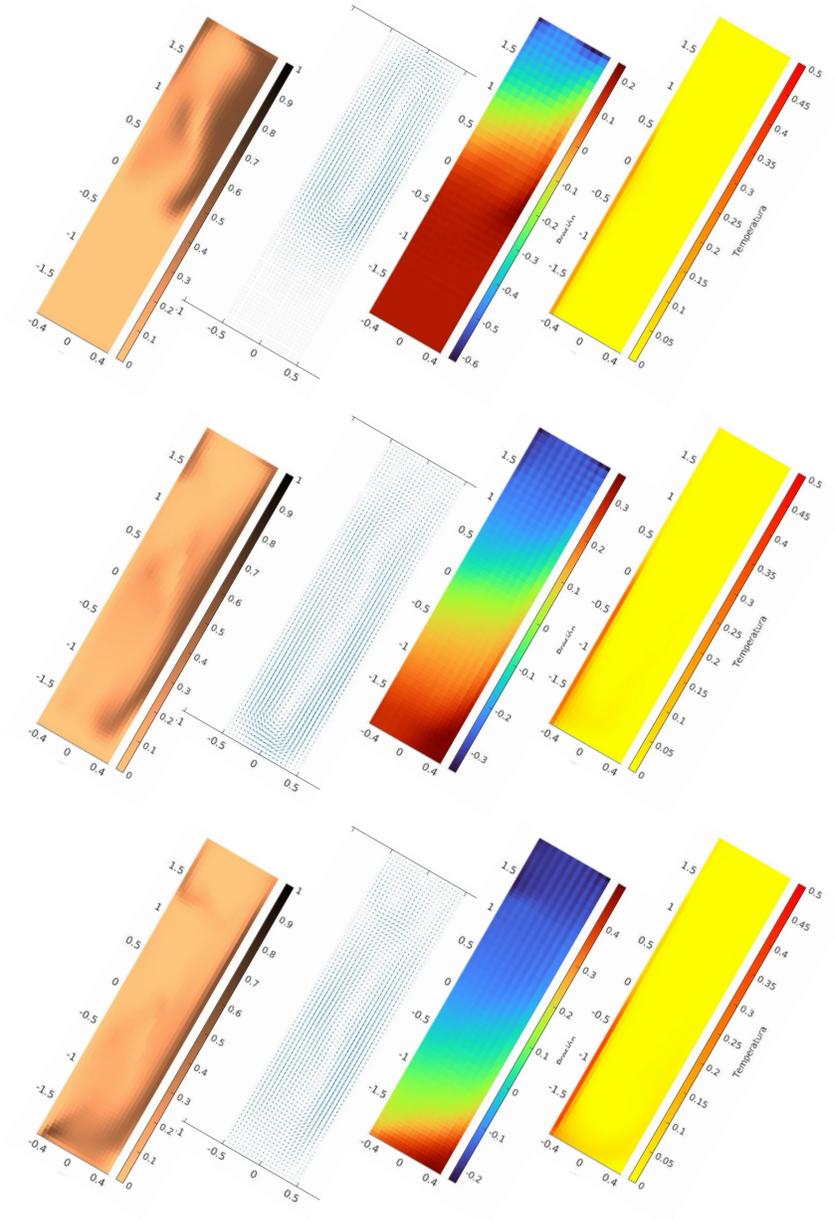


Figura 5.1: Resultados numéricos para los primeros instantes de tiempo de simulación del Test de Diehl para un ángulo de inclinación  $\theta = 30^\circ$  y una variación de temperatura  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

## 5.2. Validación del esquema numérico utilizado

En el primer experimento se enfocará en validar el esquema numérico utilizado, para esto se procede a realizar una simulación numérica del proceso de convección natural en un tanque vertical que únicamente contiene un fluido de densidad  $\rho_f$ , a este recipiente se le aplica una temperatura de  $T_h$  en la cara del lado izquierdo, mientras que la del lado derecho esta a temperatura ambiente.

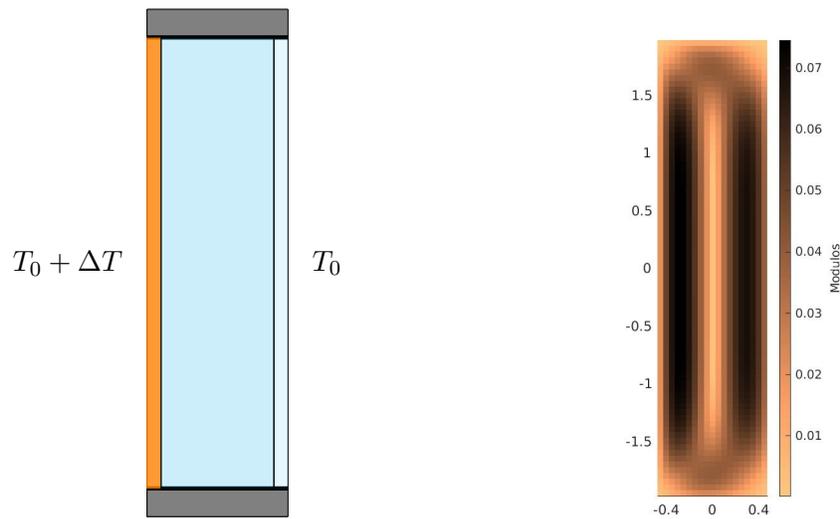


Figura 5.2: Esquema del proceso físico que se desea modelar (izquierda), módulos de velocidad obtenidos del proceso de convección de natural con  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  (derecha)

La figura muestra la diferencia de los módulos que hay en ambas caras, esto debido a que al aplicarse un  $\Delta T$  al lado izquierdo mayor que al lado derecho la densidad del fluido en el lado izquierdo disminuye y por ende tiende a subir y generar una circulación que se disminuye al irse enfriando en la cara del lado derecho que tiene un  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ .

Ya con esta simulación realizada el siguiente paso es modelar numéricamente un proceso de sedimentación en un estanque con las mismas condiciones para corroborar que si una vez el solido acumulado en la parte inferior se produce la convección natural en la zona donde se encuentra el fluido.

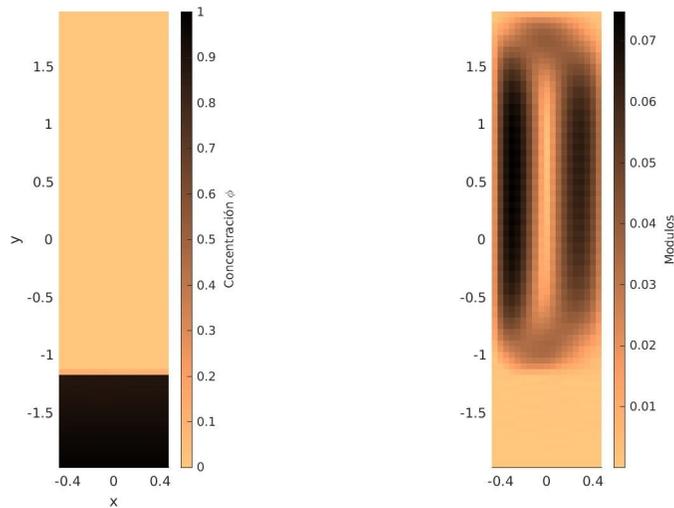


Figura 5.3: Proceso de sedimentación casi terminado con concentración inicial  $\phi_0 = 0,2$  (izquierdo), módulos de las velocidades en el sistema una vez terminada la sedimentación del sólido (derecha).

Se puede ver que los ordenes de velocidades en cada uno de los casos coinciden, esto permite afirmar que la velocidad de la mezcla  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s\phi + (1 - \phi)\mathbf{q}_f$  cuando  $\phi = 0$  es equivalente a la velocidad que alcanza un fluido bajo las mismas condiciones.

En otras palabras, la solución obtenida para la velocidad del fluido sin sólido alguno en el medio se asemeja bastante a la obtenida en el fluido una vez finalizado el proceso de sedimentación.

### 5.3. Simulación de proceso de sedimentación inclinada bajo convección natural

El primer experimento se enfoca en analizar el efecto que tiene la variación de temperatura en las caras del recipiente, para esto se hace una comparación en el comportamiento de la sedimentación sin un cambio de temperatura en las caras con otro caso en el que si existe, ambos experimentos cuentan con las mismas condiciones iniciales y de entorno.

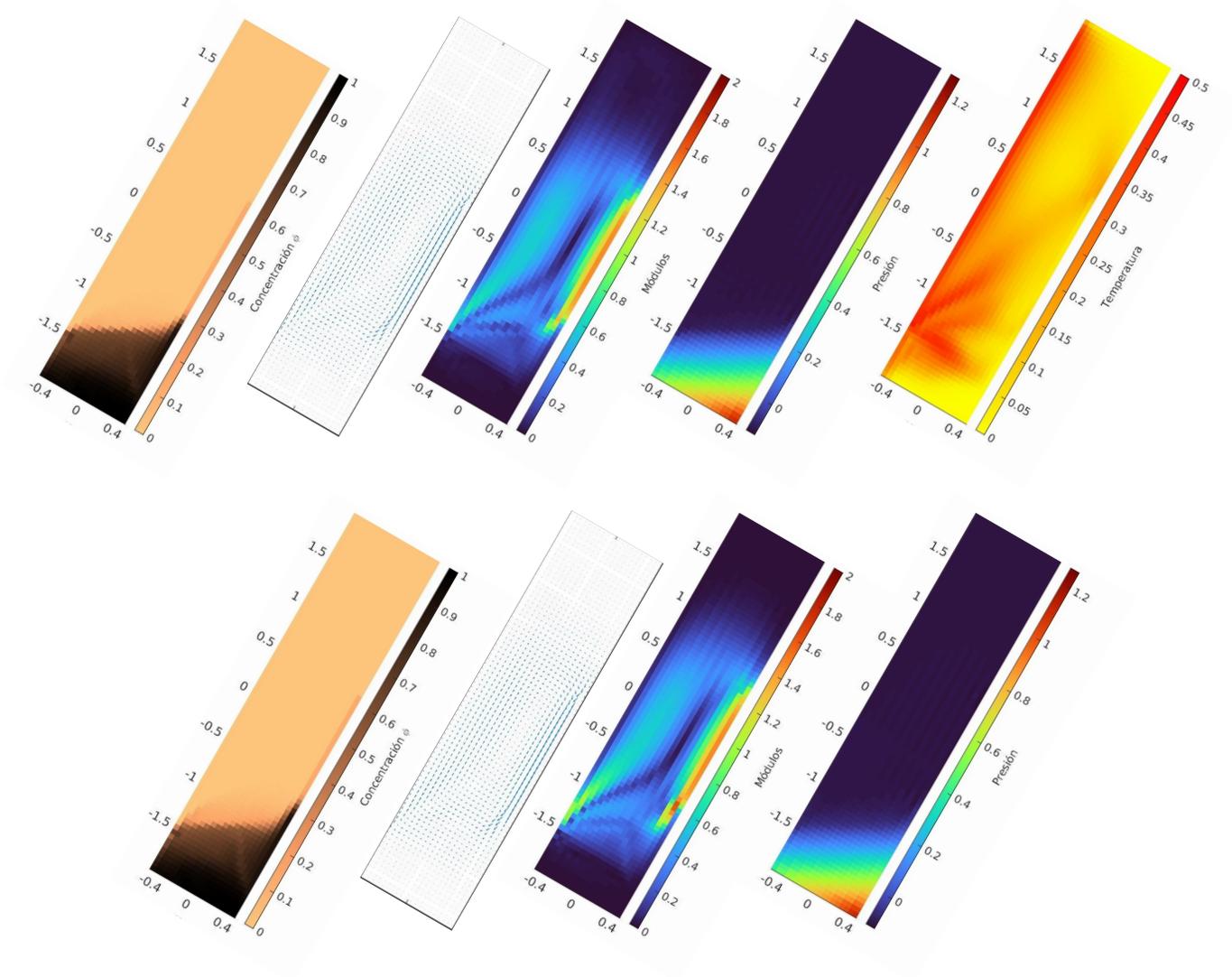


Figura 5.4: Proceso de sedimentación consolidación en un recipiente con una inclinación de  $\theta = 30^\circ$  bajo una variación de temperatura  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  (fila superior) y sin variación de temperatura (fila inferior) para un instante de tiempo  $t = 2$ .

como se puede observar en los resultados presentados, la variación de temperatura en las caras provoca un aumento en la velocidad de sedimentación, si bien no se puede considerar como un aumento significativo la existencia del mismo permite plantear distintas hipótesis en lo que respecta a la temperatura o inclinación del recipiente.

## 5.4. Análisis de producción de agua clara

En esta sección del trabajo se hará un análisis de la producción de agua clara para las diversas combinaciones de parámetros en la simulación. Para realizar este trabajo se comienza definiendo el parámetro de eficiencia  $\eta_{\text{agua}}$  el cual se define como

$$\eta_{\text{agua}} = \frac{T_{\text{ref}}}{T_{\text{agua}}} \quad (5.1)$$

donde  $T_{\text{agua}}$  es el tiempo necesario para tener un 90% del agua en forma clara, y  $T_{\text{ref}}$  es el tiempo necesario para obtener un 90% de agua en forma clara en el caso base de  $\theta = 0^\circ$  y  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ . Se considera como agua clara cuya celda del dominio donde la concentración de sólido es menor al 1%.

Basado en [1, 10, 19, 21, 33] estableceremos la hipótesis de que  $T_{\text{agua}}$  es una función que depende de la inclinación, concentración inicial y temperatura.

$T^\circ \backslash \theta$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$
$20^\circ\text{C}$	1.000	1.277	1.360	1.474	1.567	1.744
$30^\circ\text{C}$	1.056	1.276	1.354	1.466	1.564	1.737
$40^\circ\text{C}$	1.062	1.278	1.346	1.469	1.566	1.740
$50^\circ\text{C}$	1.069	1.285	1.335	1.446	1.549	1.737
$60^\circ\text{C}$	1.074	1.294	1.325	1.436	1.536	1.713

Cuadro 5.2: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 20%

$T^\circ \backslash \theta$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$
$20^\circ\text{C}$	1.000	1.420	1.596	1.722	2.001	2.202
$30^\circ\text{C}$	1.082	1.420	1.598	1.729	2.001	2.197
$40^\circ\text{C}$	1.091	1.420	1.596	1.723	1.992	2.192
$50^\circ\text{C}$	1.103	1.426	1.582	1.714	1.973	2.167
$60^\circ\text{C}$	1.118	1.433	1.575	1.698	1.975	2.128

Cuadro 5.3: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 10%

$T^\circ \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
20°C	1.000	1.399	1.732	2.077	2.249	2.652
30°C	1.002	1.400	1.735	2.077	2.241	2.644
40°C	1.009	1.397	1.735	2.010	2.238	2.628
50°C	1.021	1.400	1.734	2.001	2.224	2.614
60°C	1.038	1.412	1.730	1.993	2.210	2.601

Cuadro 5.4: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 5 %

En concordancia con lo que mostró Boycott, los resultados permiten afirmar que a medida que el ángulo de inclinación disminuye la producción de agua clara aumenta, por otro lado, un aumento en la variación de temperatura aumenta la velocidad de generación de agua clara para ángulos de inclinación cercanos a los noventa grado.

Además, para bajas concentraciones iniciales el tiempo de generación de agua clara es considerablemente menor.

## 5.5. Análisis de asentamiento de sólido

En esta sección del trabajo se hará un análisis del asentamiento de sólido para las diversas combinaciones de parámetros en la simulación. Al igual que en la sección anterior, para realizar este trabajo se comienza definiendo el parámetro de eficiencia en  $\eta_{\text{sólido}}$  el cual se define como

$$\eta_{\text{sólido}} = \frac{T_{\text{ref}}}{T_{\text{sólido}}} \quad (5.2)$$

donde  $T_{\text{sólido}}$  es el tiempo necesario para tener un 90 % del sólido asentado, y  $T_{\text{ref}}$  es el tiempo necesario para obtener un 90 % del sólido asentado en el caso base de  $\theta = 0^\circ$  y  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ . Se considera como sólido cuya celda del dominio donde la concentración de sólido es mayor al 70 %.

$T^\circ \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
20°C	1.000	1.325	1.172	1.145	1.233	1.411
30°C	1.132	1.326	1.171	1.149	1.231	1.414
40°C	1.134	1.323	1.176	1.142	1.232	1.415
50°C	1.164	1.324	1.191	1.152	1.232	1.414
60°C	1.134	1.321	1.202	1.156	1.211	1.407

Cuadro 5.5: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 20 %

$T^\circ \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
20°C	1.000	1.641	1.652	1.842	2.199	2.465
30°C	1.204	1.637	1.655	1.839	2.193	2.456
40°C	1.234	1.636	1.653	1.842	2.196	2.455
50°C	1.255	1.634	1.657	1.845	2.196	2.426
60°C	1.268	1.625	1.657	1.847	2.192	2.410

Cuadro 5.6: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 10 %

$T^\circ \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
20°C	1.000	1.437	1.645	2.178	2.499	2.933
30°C	1.005	1.431	1.645	2.174	2.507	2.923
40°C	1.011	1.429	1.646	2.184	2.509	2.913
50°C	1.018	1.426	1.645	2.187	2.505	2.903
60°C	1.023	1.427	1.660	2.201	2.507	2.908

Cuadro 5.7: Coeficientes de eficiencia  $\eta$  para los distintos casos de sedimentación bajo convección natural con concentración inicial uniforme del 5 %

Los resultados indican que mientras más se inclina el contenedor, aumenta la velocidad de la producción de sólido, pero que un aumento de temperatura no siempre acelera el proceso de asentamiento.

Algunos ángulos de inclinación permiten que el aumento de temperatura y la convección natural acelere el proceso de asentamiento del sólido. Distintas distribuciones de concentración inicial indican que el asentamiento es mayor cuando la concentración inicial es menor y el ángulo de inclinación es mayor.

## Conclusiones, limitaciones y trabajos futuros

Esta memoria ha explorado el proceso de sedimentación consolidación en recipientes inclinados mejorado mediante la aplicación de calor. A través de una serie de experimentos y análisis, hemos demostrado de manera concluyente que la aplicación de calor puede aumentar la velocidad de asentamiento de las partículas en suspensión. Este fenómeno se debe a la reducción de la viscosidad del líquido provoca un aumento en la circulación de las partículas, lo que facilita su sedimentación.

Además, hemos observado que la temperatura y la concentración de las partículas desempeñan un papel crucial en la eficiencia de este proceso. A medida que ajustamos la temperatura y la concentración adecuadamente, podemos lograr tasas de sedimentación aún más altas.

Este descubrimiento tiene aplicaciones significativas en diversas industrias, desde el tratamiento de aguas residuales hasta la separación de minerales en la minería. La capacidad de acelerar el asentamiento de partículas de manera controlada puede resultar en ahorros significativos de tiempo y energía, además de mejorar la eficiencia de distintos procesos que se desarrollan en la industria.

La sedimentación asistida por calor representa una técnica prometedora que merece una mayor investigación y desarrollo. Su potencial para optimizar procesos y mejorar la eficiencia en una variedad de aplicaciones la convierte en un área emocionante para futuros estudios y usos prácticos. Considerar distintas geometrías en dos y tres dimensiones, funciones de flujo como la de Vesilind, el uso de métodos numéricos como métodos de volúmenes finitos, elementos finitos, Galerkin discontinuo, comparar con experimentos realizados bajo las condiciones operacionales de la industria, son los principales focos para seguir con la investigación.

Comprender y dominar estos procesos es esencial para abordar los desafíos ambientales y de ingeniería relacionados con la separación de partículas sólidas y líquidos.

## Anexo

### 7.1. Esquema matricial para ecuación de Stokes

Sean  $N_x$  y  $N_y$  la cantidad de celdas en dirección del eje  $x$  e  $y$  respectivamente. Dado que cada incógnita de nuestro sistema toma un valor en el centro de cada celda. Reescribiremos matricialmente los términos de nuestro sistema de Stokes.

#### 7.1.1. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K}$

Sea  $u_K$  el valor que toma nuestra incógnita en el volumen de control  $K$ , definiremos como  $u_\omega$  el valor que toma en el volumen de control que comparte la arista superior con  $K$ , denotaremos por  $K_\omega$  al volumen de control que esta inmediatamente arriba de  $K$ , de manera análoga definiremos  $u_\gamma, u_\xi, u_\zeta$  como los valores que toma en los volúmenes de control inferior  $K_\gamma$ , izquierdo  $K_\xi$  y derecho  $K_\zeta$ , respectivamente. Por lo tanto para un volumen de control  $K$ , cuyas aristas no intersectan con las aristas exteriores

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

lo que se puede reescribir como

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = (\alpha_\xi + \alpha_\omega + \alpha_\zeta + \alpha_\gamma) \mathbf{q}_K - \alpha_\xi \mathbf{q}_\xi - \alpha_\omega \mathbf{q}_\omega - \alpha_\zeta \mathbf{q}_\zeta - \alpha_\gamma \mathbf{q}_\gamma$$

donde

$$\alpha_l = m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_l}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_l} d_{K_l,\sigma}}$$

con  $l$  en  $\{\xi, \omega, \zeta, \gamma\}$ . Análogamente, para un volumen de control  $K$  con alguna arista en la frontera del dominio se definen los siguientes casos.

- Esquina superior izquierda del dominio  $K_{1,1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

- Primera fila de celdas  $K_{1,j}$  con  $j = 2, 3, \dots, N_x - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

- Esquina superior derecha del dominio  $K_{1,N_x}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

- Primera columna del dominio  $K_{i,1}$  con  $i = 2, 3, \dots, N_y - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

- Última columna del dominio  $K_{i,N_x}$  con  $i = 2, 3, \dots, N_y - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\gamma}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\gamma) \end{aligned}$$

- Esquina inferior izquierda del dominio  $K_{N_y,1}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) \end{aligned}$$

- Última fila del dominio  $K_{N_y,j}$  con  $j = 2, 3, \dots, N_x - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\zeta}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\zeta) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) \end{aligned}$$

- Esquina inferior derecha del dominio  $K_{N_y,N_x}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\xi}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\xi) + m_\sigma \frac{\mu_K \mu_{K_\omega}}{\mu_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (\mathbf{q}_K - \mathbf{q}_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) + m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K) \end{aligned}$$

Antes de presentar las matrices, definiremos como  $\beta_l$  el valor de  $\mathbf{F}_{\sigma,K}$  cuando la arista  $l$  del volumen de control pertenece a una arista del dominio. Es decir

$$\beta_l := m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K,\sigma}} (\mathbf{q}_K)$$

donde  $l$  hace referencia a que arista de  $K$  está en el borde del dominio. A continuación definiremos  $\mu_{\mathcal{I}}^\xi$  como la sumatoria de las contribuciones de los volúmenes de control vecinos, donde  $\mathcal{E}$  es el conjunto de aristas que comparten el volumen de control  $K$  con el dominio  $\Omega$  y  $\mathcal{I}$  es el conjunto de las aristas que no están en la frontera del dominio y por lo tanto si existe un volumen de control vecino en esa dirección. Por ejemplo, para el volumen de control ubicado en la esquina superior izquierda  $\mu_{\mathcal{I}}^\xi = \mu_{\gamma,\zeta}^{\xi,\omega} = \alpha_\gamma + \alpha_\zeta + \beta_\xi + \beta_\omega$ . Así, el esquema matricial es de la forma

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mu_{\zeta,\gamma}^{\xi,\omega} & -\alpha_{\zeta} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{\xi} & \mu_{\xi,\zeta,\gamma}^{\omega} & -\alpha_{\zeta} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{\xi,\zeta,\gamma}^{\omega} & -\alpha_{\zeta} \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{\xi} & \mu_{\gamma,\xi}^{\omega,\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} := \begin{bmatrix} \mu_{\zeta,\omega}^{\gamma,\xi} & -\alpha_{\zeta} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{\xi} & \mu_{\xi,\zeta,\omega}^{\gamma} & -\alpha_{\zeta} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{\xi,\zeta,\omega}^{\gamma} & -\alpha_{\zeta} \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{\xi} & \mu_{\omega,\xi}^{\gamma,\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mu_{\omega,\zeta,\gamma}^{\xi} & -\alpha_{\zeta} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{\xi} & \mu_{\xi,\omega,\zeta,\gamma} & -\alpha_{\zeta} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_{\xi,\omega,\zeta,\gamma} & -\alpha_{\zeta} \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{\xi} & \mu_{\xi,\omega,\gamma}^{\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} := -\alpha_{\gamma} \mathbf{I} \quad \mathbf{C} := -\alpha_{\omega} \mathbf{I}$$

### 7.1.2. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}$

Siguiendo con las mismas notaciones que en el apartado anterior, para el caso en el que  $K$  no tenga aristas en el borde del dominio se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\xi} - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\omega} - p_K)(0, 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\zeta} - p_K)(1, 0) + \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\gamma} - p_K)(0, -1) \\ &= \left( \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\zeta} - p_{\xi}), \frac{1}{2} m_{\sigma}(p_{\omega} - p_{\gamma}) \right) \end{aligned}$$

por otro lado, si  $K$  tiene al menos una arista en la frontera del dominio se tienen los siguientes casos

- La arista superior e izquierda son parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K)(1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K)(0, -1) \\ &= \left( \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K), -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K) \right)\end{aligned}$$

- La arista superior y derecha son parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K)(0, -1) \\ &= \left( -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K), -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K) \right)\end{aligned}$$

- La arista inferior e izquierda son parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K)(0, 1) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K)(1, 0) \\ &= \left( \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K), \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K) \right)\end{aligned}$$

- La arista inferior y derecha son parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K)(0, 1) \\ &= \left( -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K), \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K) \right)\end{aligned}$$

- La arista izquierda es parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K)(0, 1) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K)(1, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K)(0, -1) \\ &= \left( \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K), \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_\gamma) \right)\end{aligned}$$

- La arista superior es parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K)(1, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K)(0, -1) \\ &= \left( \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_\xi), -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K) \right) \end{aligned}$$

- La arista derecha es parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K)(0, 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\gamma - p_K)(0, -1) \\ &= \left( -\frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K), \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_\gamma) \right) \end{aligned}$$

- La arista inferior es parte de la frontera del dominio

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(p_{K^*} - p_K) &= \frac{1}{2}m_\sigma(p_\xi - p_K)(-1, 0) + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K)(0, 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_K)(1, 0) \\ &= \left( \frac{1}{2}m_\sigma(p_\zeta - p_\xi), \frac{1}{2}m_\sigma(p_\omega - p_K) \right) \end{aligned}$$

Luego, el esquema matricial para la componente  $x$  será de la forma

$$\mathbf{A}_x := \mathbf{P}_x \mathbf{I}$$

donde

$$\mathbf{P}_x := \frac{1}{2}m_\sigma \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por otro lado, para la componente  $y$

$$\mathbf{A}_y := \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yf} & \mathbf{P}_{y\gamma} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{P}_{y\omega} & 0 & \mathbf{P}_{y\gamma} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{P}_{y\omega} & 0 & \mathbf{P}_{y\gamma} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{P}_{y\omega} & \mathbf{P}_{yl} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{P}_{yf} = \frac{1}{2}m_\sigma \mathbf{I} = \mathbf{P}_{y\omega} = -\mathbf{P}_{y\gamma} = -\mathbf{P}_{yl}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que las matrices  $\mathbf{A}_x$  e  $\mathbf{A}_y$  que modelan

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{A}_{K,\sigma}(v_K + v_{K^*})$$

son las transpuestas de las matrices obtenidas anteriormente.

### 7.1.3. Matriz para $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \tau_\sigma$

De la misma manera que lo hemos hecho en los incisos anteriores

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \tau_\sigma(p_{K^*} - p_K) &= \tau_{\sigma,l}(p_\xi - p_K) + \tau_{\sigma,u}(p_\omega - p_K) \\ &\quad + \tau_{\sigma,r}(p_\zeta - p_K) + \tau_{\sigma,d}(p_\gamma - p_K) \end{aligned}$$

definiendo  $\chi_{\mathcal{I}}$  como la suma de las contribuciones de los volúmenes de control vecinos de  $K$ , donde  $\mathcal{I}$  es el conjunto de las aristas que comparte el volumen de control  $K$ . Por ejemplo,

$\chi_{\zeta,\gamma} = \tau_{\sigma,\zeta} + \tau_{\sigma,\gamma}$ . Esta definición permite modelar matricialmente como

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{T}_f & \mathbf{T}_\gamma & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{T}_\omega & \mathbf{T} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{T} & \mathbf{T}_\gamma \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{T}_\omega & \mathbf{T}_l \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{T}_f := \begin{bmatrix} -(\chi_{\zeta,\gamma}) & \tau_{\sigma,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\zeta,\gamma}) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -(\chi_{\xi,\zeta,\gamma}) & \tau_{\sigma,r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\gamma}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_l := \begin{bmatrix} -(\chi_{\zeta,\omega}) & \tau_{\sigma,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\zeta,\omega}) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -(\chi_{\xi,\zeta,\omega}) & \tau_{\sigma,r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\omega}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} -(\chi_{\zeta,\omega,\gamma}) & \tau_{\sigma,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\omega,\zeta,\gamma}) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -(\chi_{\xi,\omega,\zeta,\gamma}) & \tau_{\sigma,r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tau_{\sigma,l} & -(\chi_{\xi,\omega,\gamma}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\omega := \tau_{\sigma,u} \mathbf{I} \quad \mathbf{T}_\gamma := \tau_{\sigma,d} \mathbf{I}$$

#### 7.1.4. Esquema global

Una vez con todas las matrices definidas nuestro sistema matricial queda expresado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{A}_x & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} & \lambda \mathbf{A}_y & 0 \\ \mathbf{A}'_x & \mathbf{A}'_y & -\eta^2 \mathcal{T} & M \\ 0 & 0 & M' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ p \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda f_x \\ \lambda f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $M$  es el vector columna que se incorpora al esquema para establecer la condición  $\int_{\Omega} p = 0$  y como habíamos dicho anteriormente se agrega una nueva incógnita  $\nu$  que no será de importancia al momento de la resolución del sistema.

## 7.2. Esquema numérico para el flujo

Para calcular correctamente el flujo numérico se hace uso de propiedades fundamentales del cálculo y análisis de los distintos casos que pueden ocurrir durante el proceso.

Para comenzar, vemos que

$$\hat{\phi}_1 = (4\beta - \sqrt{4(\beta^2) - 12\alpha\beta})/(6\beta)$$

$$\hat{\phi}_2 = (4\beta + \sqrt{4(\beta^2) - 12\alpha\beta})/(6\beta)$$

son los puntos críticos de las funciones de flujo (4.3) donde  $\alpha$  es la componente de velocidad y  $\beta$  es la componente normal del vector normal en el cuál ocurre la sedimentación. Con esto claro, dependiendo si se busca el máximo o mínimo se analizan los casos en los que los máximos son iguales, distintos o simplemente no existen. Luego, para cada uno de esos caso, se barajan las opciones de el valor que toma la función de flujo (4.3) correspondiente en las concentraciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

Supongamos que  $\phi_1 \leq \phi_2$  y además  $\alpha \leq 0, \beta > 0, \beta > 3\alpha$ , esto implica que hay que encontrar el mínimo valor de la función de flujo entre los valores que se presentan. Así, dado que la función es creciente hasta el primer punto crítico  $\hat{\phi}_1$ , si  $\phi_2 < \hat{\phi}_1$  entonces el valor mínimo buscado es el valor que toma la función de flujo en  $\phi_1$ .

Si  $\phi_2$  se encuentra entre los puntos críticos  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$ , entonces basta con calcular el mínimo de la función evaluada en  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Como consecuencia del hecho que la función es estrictamente decreciente entre los puntos críticos  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$ , si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se encuentran en ese intervalo entonces el valor buscado es la función de flujo evaluada en  $\phi_2$ .

Por otro lado, si  $\phi_1$  es mayor a el primer punto critico  $\hat{\phi}_1$  pero menor a  $\hat{\phi}_2$  y  $\hat{\phi}_2 < \phi_2$ , entonces el valor buscado se encuentra evaluando la función de flujo en el punto  $\hat{\phi}_2$ .

Si  $\phi_1$  es mayor a  $\hat{\phi}_2$ , entonces basta con evaluar la función de flujo en  $\phi_1$  para calcular el flujo.

En resumen, se hace un análisis de la curva que va a modelar nuestra función de flujo, calculamos sus máximos y mínimos (en caso de que existan) y una vez con esto procedemos a indagar los distintos casos de interés.

## 7.3. Esquema matricial para la ecuación del calor

### 7.3.1. Matriz $D(\phi^n)$

Siguiendo lo presentado en la sección 5.2.2. se procede a crear una matriz que posee las mismas características para las celdas interiores con la diferencia de que en este caso el coeficiente de difusión se define de manera diferente, por otro lado, si una celda se encuentra en las fronteras hay que considerar las condiciones de borde impuestas.

Sea  $T_K$  el valor que toma la temperatura en el volumen de control  $K$ ,  $T_\omega$  el valor en el volumen de control inmediatamente superior  $K_\omega$ , de manera análoga se define  $T_\gamma$ ,  $T_\xi$ ,  $T_\zeta$  como los valores que toma en los volúmenes de control inferior  $K_\gamma$ , izquierdo  $K_\xi$  y derecho  $K_\zeta$ , respectivamente. Además, el coeficiente de difusión se define de la forma

$$\eta(\phi) := \left( \frac{1}{\text{Re Pr}} \right) \frac{(1 + \phi \Delta k^*)}{(1 + \phi \Delta \rho^*)(1 + \phi \Delta c_p^*)} \quad (7.1)$$

por simplicidad de notación se define  $\eta_K := \eta(\phi_K)$ . Ya con todo establecido, para un volumen de control  $K$  cuyas aristas son todas interiores

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K \mu_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

lo que se puede reescribir como

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = (\alpha_\xi + \alpha_\omega + \alpha_\zeta + \alpha_\gamma) T_K - \alpha_\xi T_\xi - \alpha_\omega T_\omega - \alpha_\zeta T_\zeta - \alpha_\gamma T_\gamma$$

donde

$$\alpha_l = m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_l}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_l} d_{K_l,\sigma}}$$

con  $l$  en  $\{\xi, \omega, \zeta, \gamma\}$ . Análogamente, para un volumen de control  $K$  con alguna arista en la frontera del dominio se definen los siguientes casos.

- Esquina superior izquierda del dominio  $K_{1,1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K,\sigma}} (T_K) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

- Primera fila de celdas  $K_{1,j}$  con  $j = 2, 3, \dots, N_x - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K,\sigma}} (T_K) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

- Esquina superior derecha del dominio  $K_{1,N_x}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K,\sigma}} (T_K) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \mu_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

- Primera columna del dominio  $K_{i,1}$  con  $i = 2, 3, \dots, N_y - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

- Última columna del dominio  $K_{i,N_x}$  con  $i = 2, 3, \dots, N_y - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\gamma}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\gamma} d_{K_\gamma,\sigma}} (T_K - T_\gamma) \end{aligned}$$

- Esquina inferior izquierda del dominio  $K_{N_y,1}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K,\sigma}} (T_K) \end{aligned}$$

- Última fila del dominio  $K_{N_y,j}$  con  $j = 2, 3, \dots, N_x - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma,K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega,\sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta,\sigma}} (T_K - T_\zeta) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K,\sigma}} (T_K) \end{aligned}$$

- Esquina inferior derecha del dominio  $K_{N_y, N_x}$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{F}_{\sigma, K} = & m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K, \sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi, \sigma}} (T_K - T_\xi) + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\omega}}{\eta_K d_{K, \sigma} + \eta_{K_\omega} d_{K_\omega, \sigma}} (T_K - T_\omega) \\ & + m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\zeta}}{\eta_K d_{K, \sigma} + \eta_{K_\zeta} d_{K_\zeta, \sigma}} (T_K) + m_\sigma \frac{\eta_K}{d_{K, \sigma}} (T_K) \end{aligned}$$

Antes de presentar las matrices, definiremos como  $\beta_l$  el valor de  $\mathbf{F}_{\sigma, K}$  cuando la arista  $l$  del volumen de control pertenece a una arista del dominio en la cual la condición de borde es de flujo cero. Es decir

$$\beta_l := m_\sigma \frac{\mu_K}{d_{K, \sigma}} (T_K)$$

donde  $l$  hace referencia a que arista de  $K$  está en el borde del dominio donde la condición es de flujo cero.

A continuación, definiremos  $\mu_{\mathcal{I}}^\xi$  como la sumatoria de las contribuciones de los volúmenes de control vecinos, donde  $\mathcal{E}$  es el conjunto de aristas que comparten el volumen de control  $K$  con el dominio  $\Omega$  y  $\mathcal{I}$  es el conjunto de las aristas que no están en la frontera del dominio y por lo tanto si existe un volumen de control vecino en esa dirección. Por ejemplo, para el volumen de control ubicado en la esquina superior izquierda  $\mu_{\mathcal{I}}^\xi = \mu_{\gamma, \zeta, \xi}^\omega = \alpha_\gamma + \alpha_\zeta + \alpha_\xi + \beta_\omega$ . Así, el esquema matricial es de la forma

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mu_{\zeta, \gamma, \xi}^\omega & -\alpha_\zeta & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_\xi & \mu_{\xi, \zeta, \gamma}^\omega & -\alpha_\zeta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{\xi, \zeta, \gamma}^\omega & -\alpha_\zeta \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_\xi & \mu_{\gamma, \xi, \zeta}^\omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} := \begin{bmatrix} \mu_{\zeta, \omega, \xi}^\gamma & -\alpha_\zeta & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_\xi & \mu_{\xi, \zeta, \omega}^\gamma & -\alpha_\zeta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{\xi, \zeta, \omega}^\gamma & -\alpha_\zeta \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_\xi & \mu_{\omega, \xi, \zeta}^\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mu_{\omega,\zeta,\gamma,\xi} & -\alpha_\zeta & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_\xi & \mu_{\xi,\omega,\zeta,\gamma} & -\alpha_\zeta & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_{\xi,\omega,\zeta,\gamma} & -\alpha_\zeta \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_\xi & \mu_{\xi,\omega,\gamma,\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} := -\alpha_\gamma \mathbf{I} \quad \mathbf{C} := -\alpha_\omega \mathbf{I}$$

### 7.3.2. Matriz BC

Sea  $T_l$  el valor de la temperatura en el borde que se le aplica la temperatura, se define  $\mathcal{B}$  como la condición de borde impuesta en la matriz, es decir

$$\mathcal{B} := m_\sigma \frac{\eta_K \eta_{K_\xi}}{\eta_K d_{K,\sigma} + \eta_{K_\xi} d_{K_\xi,\sigma}} T_l$$

y con esto la matriz de condiciones de borde

$$\mathbf{BC} := \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{G} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{G} := \begin{bmatrix} -\mathcal{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con todas las matrices ya definidas, se procede a resolver esquema global

$$T^{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F})^{-1} (T^{n+1/2} + \Delta t \mathbf{BC})$$

obteniendo así, la temperatura dentro del dominio en el instante  $t = n + 1$ .

## 7.4. Resultados numéricos

En este apartado se muestran distintos resultados obtenidos para distintas variaciones de parámetros en un mismo instante de tiempo.

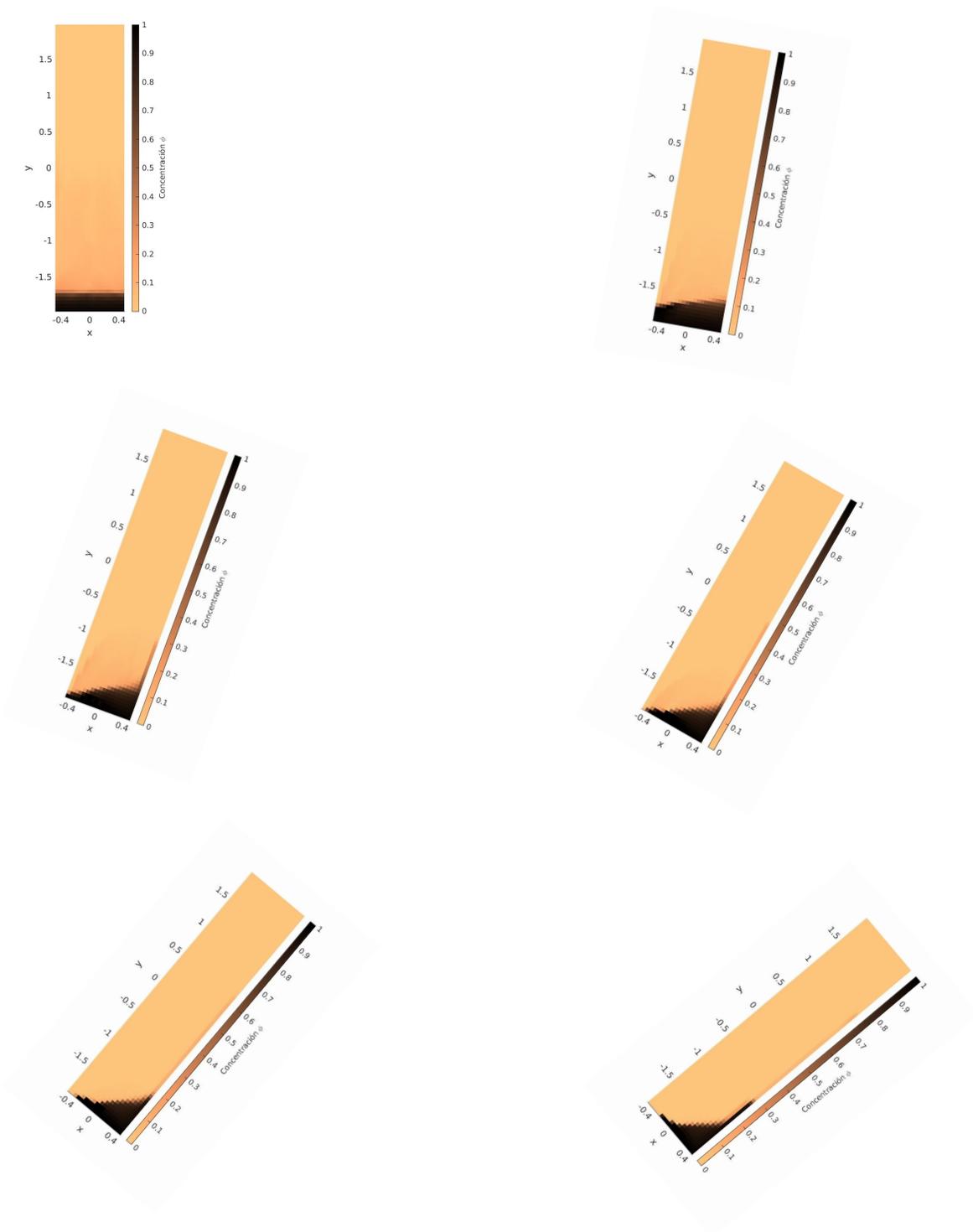


Figura 7.2: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10 % y una variación de temperatura igual a  $20^\circ$  para un instante de tiempo  $t = 2,2$ .

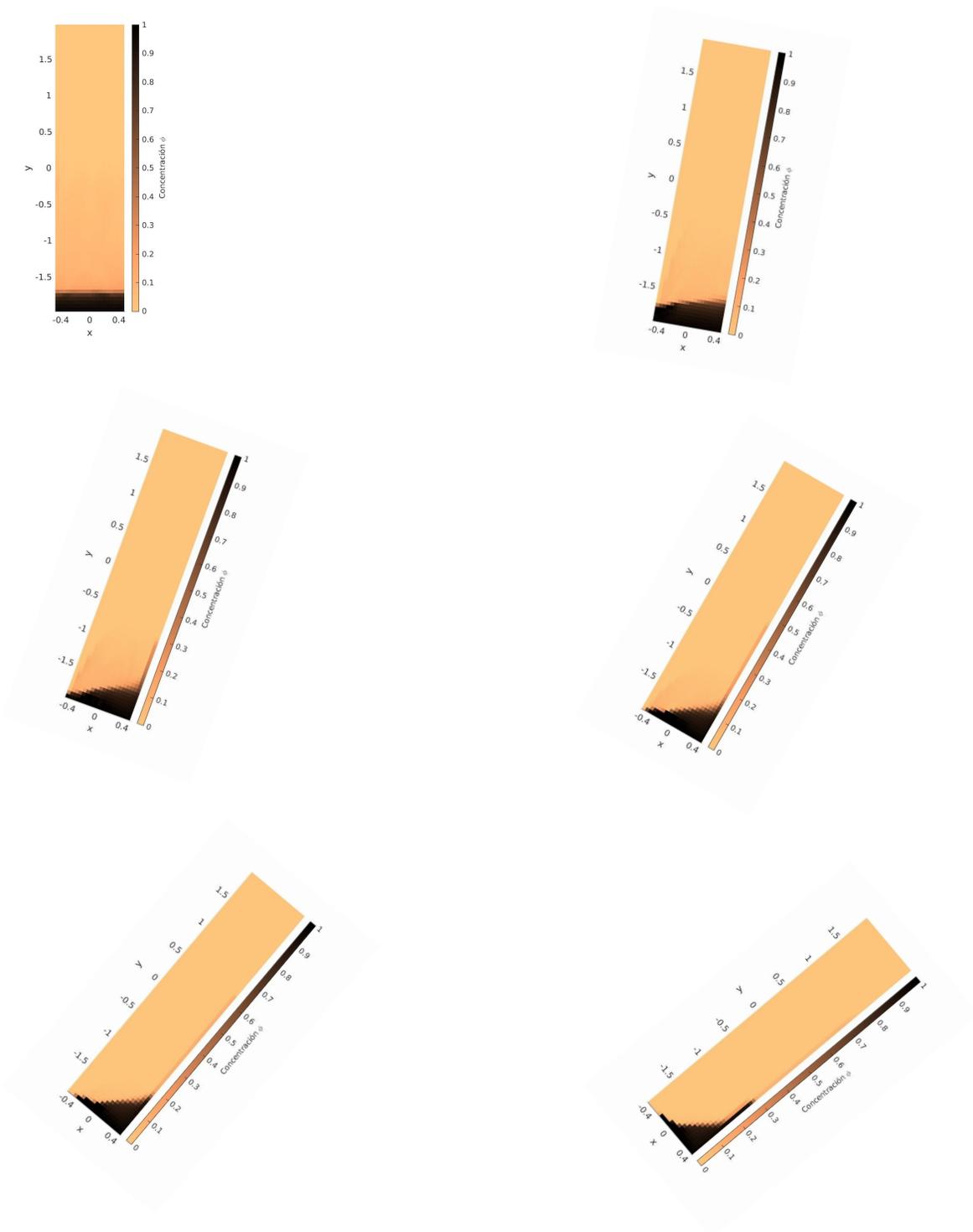


Figura 7.3: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10 % y una variación de temperatura igual a  $40^\circ$  para un instante de tiempo  $t = 2$ .

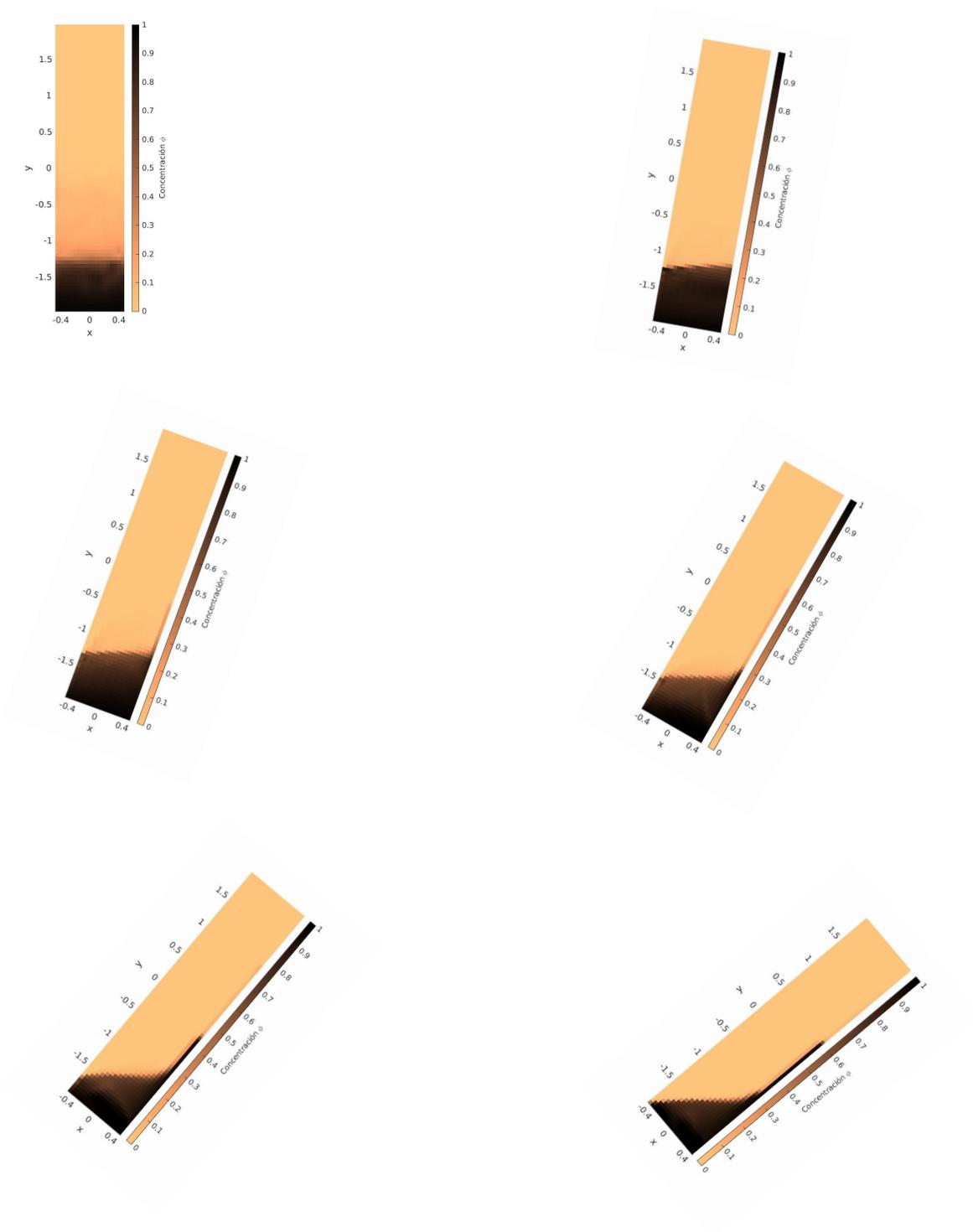


Figura 7.4: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20% y una variación de temperatura igual a cero para un instante de tiempo  $t = 2,5$ .

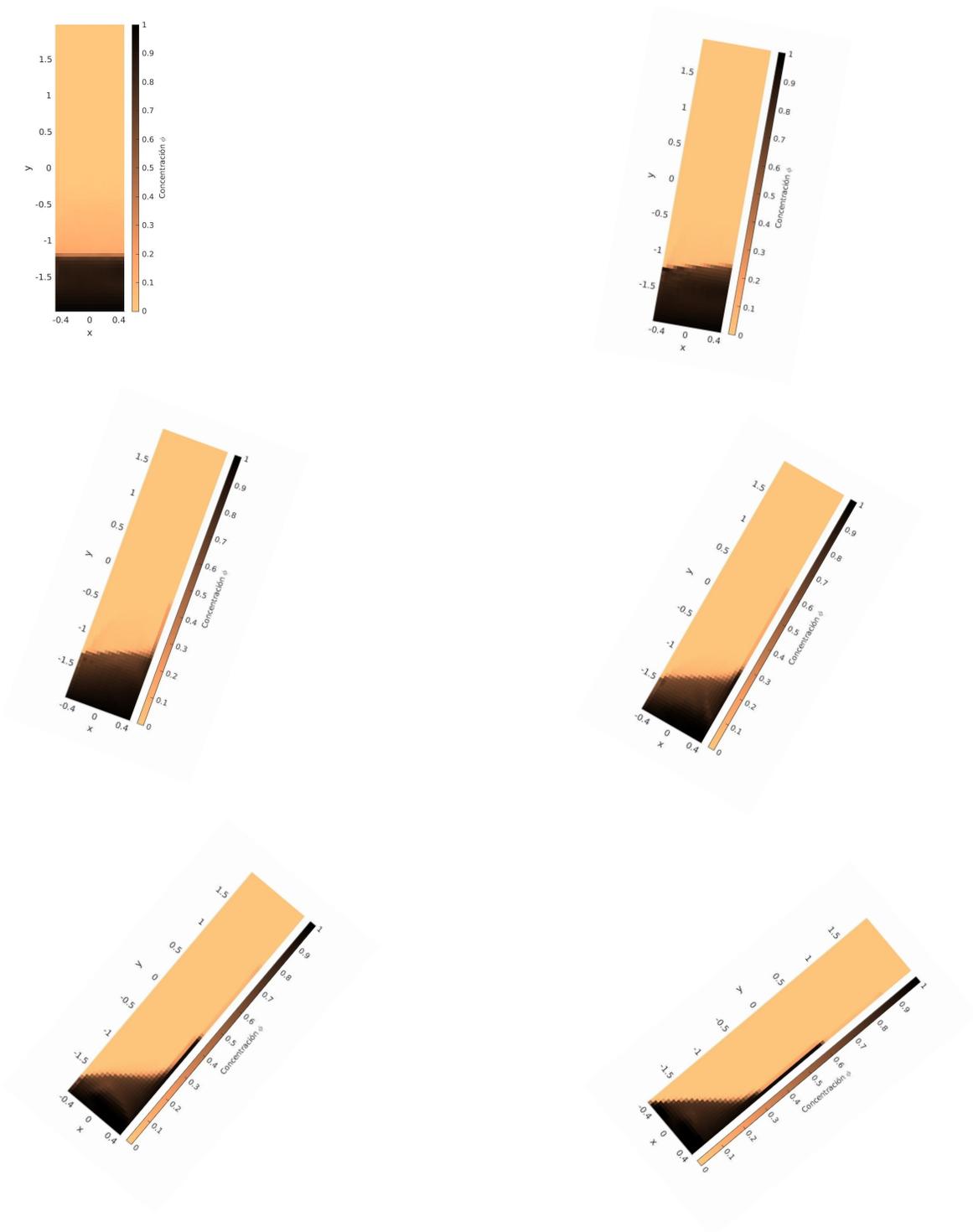


Figura 7.5: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20 % y una variación de temperatura igual a  $20^\circ$  para un instante de tiempo  $t = 2,2$ .

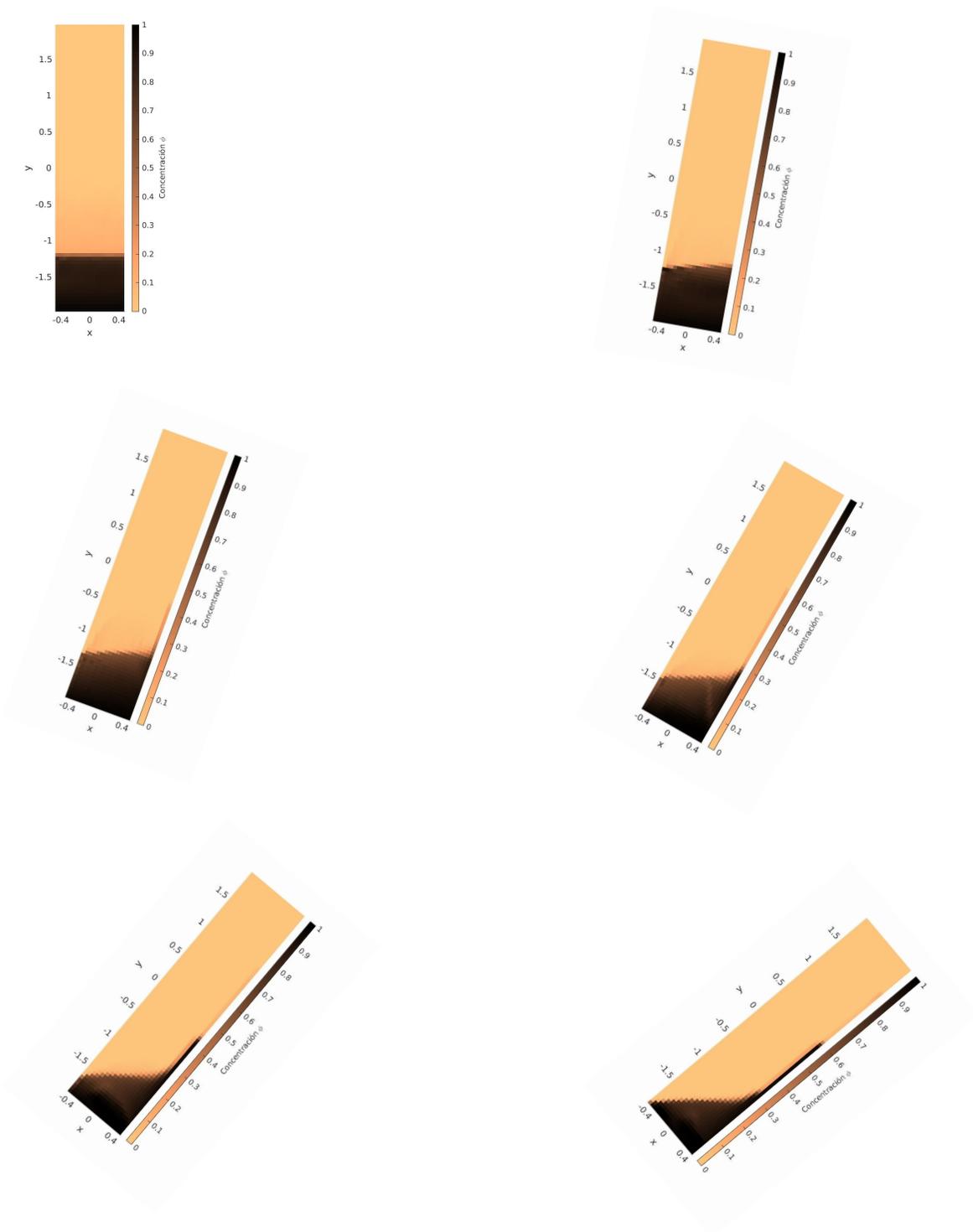


Figura 7.6: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 20 % y una variación de temperatura igual a  $40^\circ$  para un instante de tiempo  $t = 2,2$ .

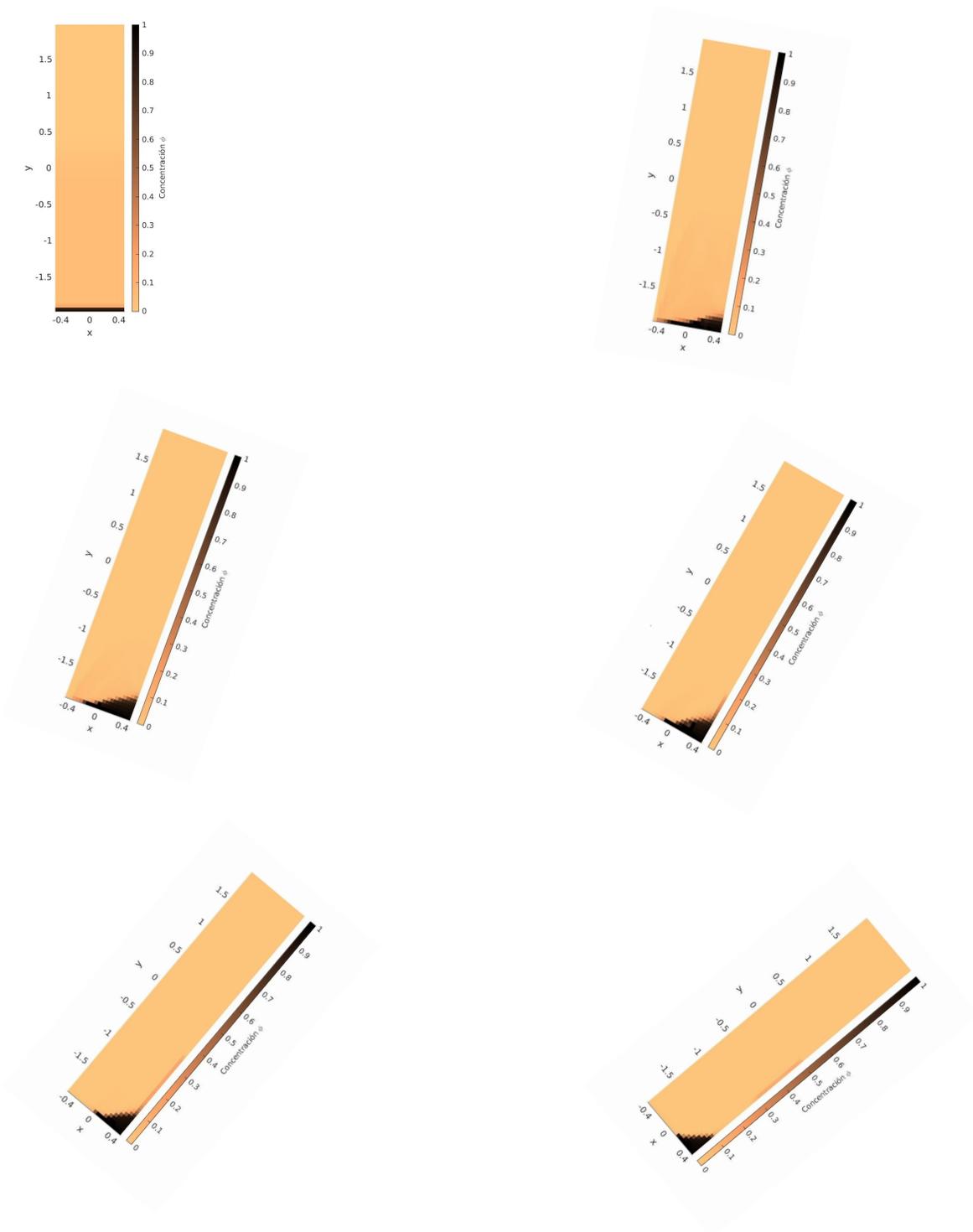


Figura 7.7: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a cero, para un instante de tiempo  $t = 3$ .

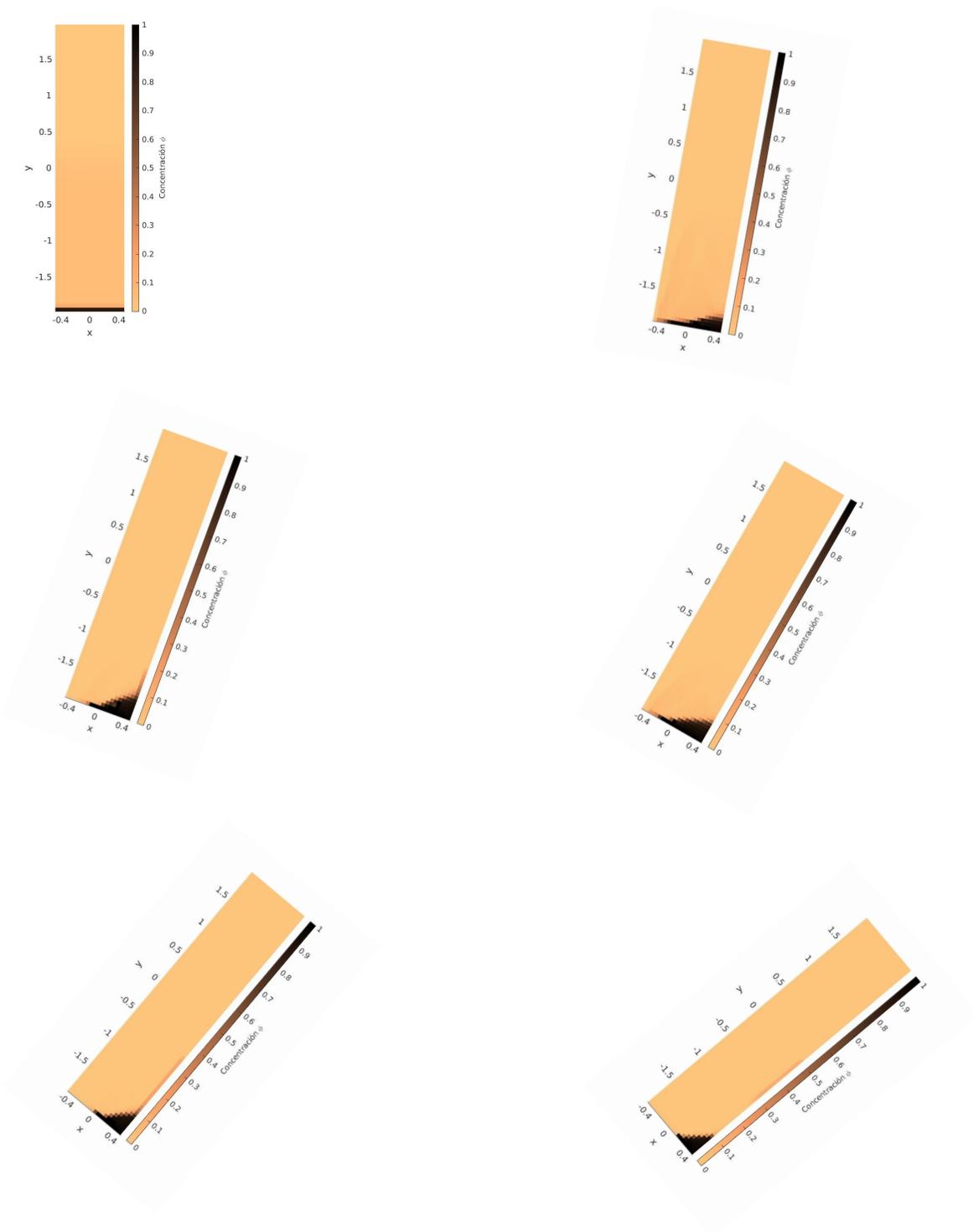


Figura 7.8: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a  $20^\circ$ , para un instante de tiempo  $t = 2,9$ .

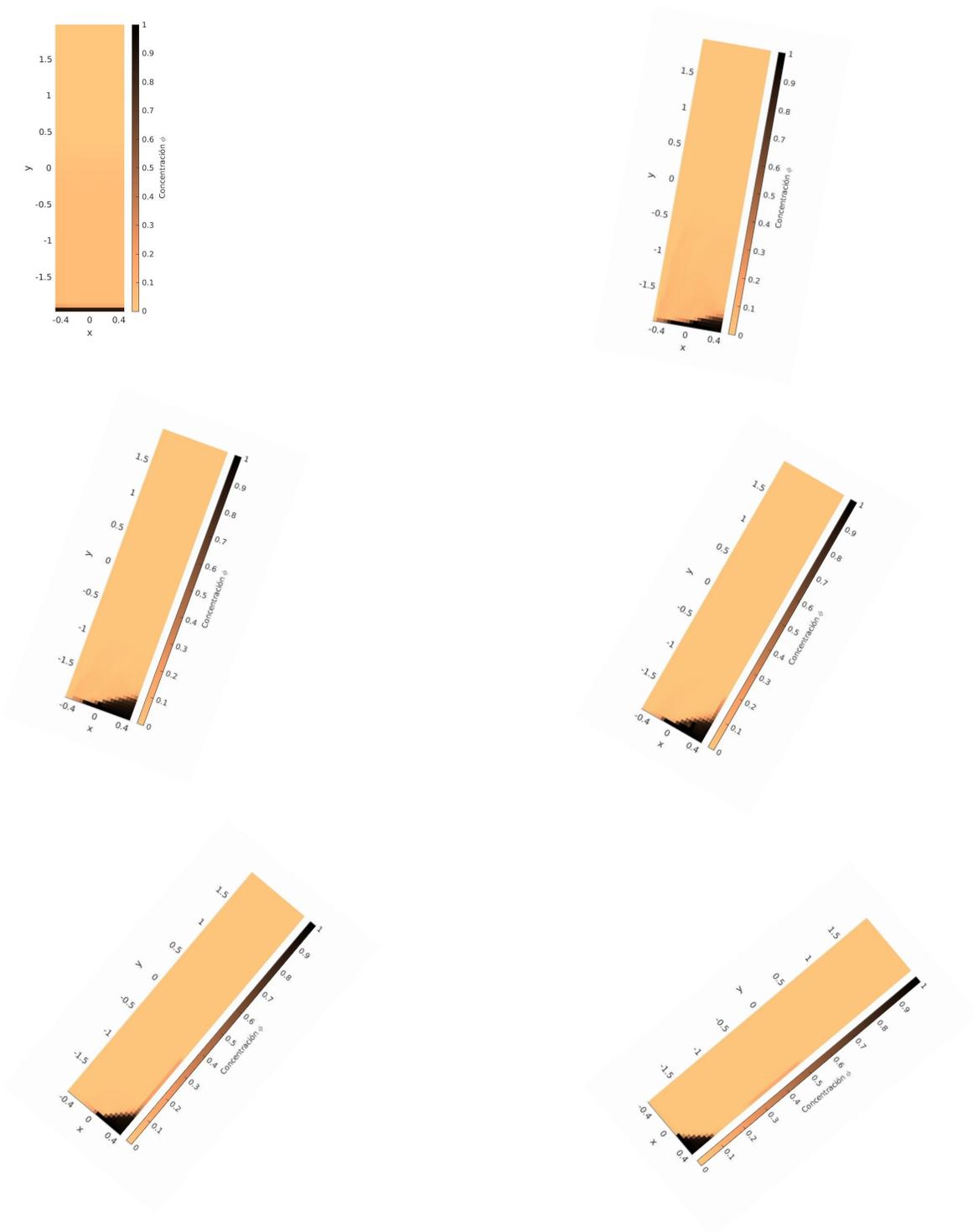


Figura 7.9: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 5 % y una variación de temperatura igual a  $40^\circ$ , para un instante de tiempo  $t = 2,9$ .

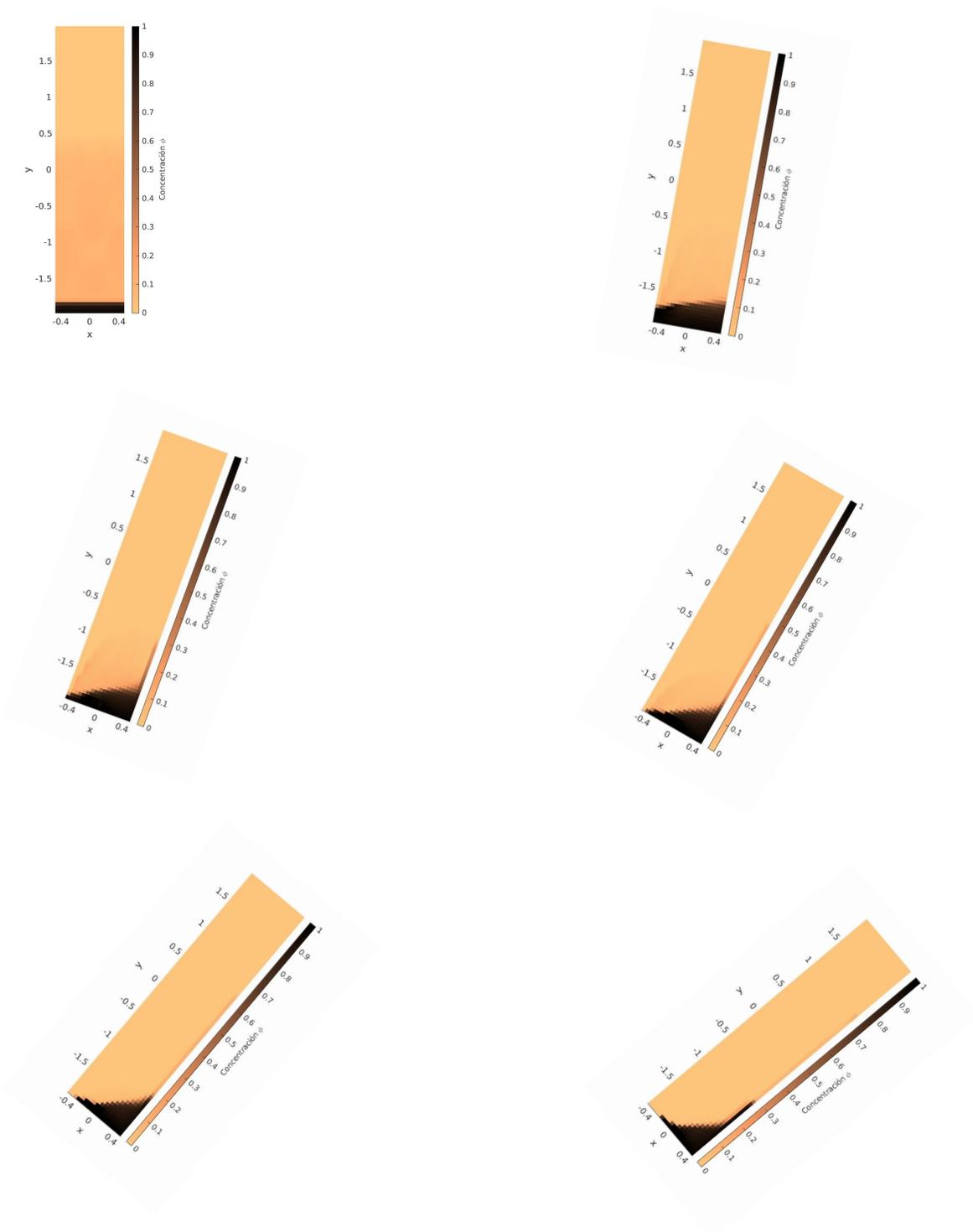


Figura 7.1: Resultados numéricos obtenidos para distintos ángulos de inclinación, una concentración inicial distribuida de un 10% y una variación de temperatura igual a cero para un instante de tiempo  $t = 3$ .

# Bibliografía

- [1] Acrivos, A. & Herbolzheimer, E. (1979) Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls, *Journal of Fluid Mechanics*, 92, 435–457.
- [2] Auteri, F., Parolini, N. & Quartapelle, L. (2002). Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow. *Journal of Computational Physics*, 183(1), 1 - - 25.
- [3] Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2007). *Transport Phenomena*. Second Edition, Wiley.
- [4] Boycott, A.E. (1920). Sedimentation of blood corpuscles. *Nature* 104, 532.
- [5] Bürger, R., Ruiz-Baier, R., Schneider, K., & Torres, H. (2012). A multiresolution method for the simulation of sedimentation in inclined channels. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 9, 479 - - 504.
- [6] Bürger, R., Ruiz-Baier, R., & Torres, H. (2012). A stabilized finite volume element formulation for sedimentation-consolidation processes. *SIAM Journal on Scientific Computing* . 34 , no. 3, B265 - - B289.
- [7] Bürger, R., Wendland, W. L., & Concha, F. (2000). Model equations for gravitational sedimentation-consolidation processes. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 80(2), 79 - - 92.
- [8] Christon, M. A., Gresho, P. M., & Sutton, S. B. (2002). Computational predictability of time dependent natural convection flows in enclosures (including a benchmark solution). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(8), 953 - - 980.
- [9] Eymard, R., Herbin, R., & Latché, J.C.(2007), Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2 or 3D meshes, *SIAM Journal on Numerical Analysis*., 45:1 - - 36.

- [10] Graham, W. & Lama, R. (1963), Sedimentation in inclined vessels. *The Canadian Journal of Chemical Engineering.*, 41: 31 - - 32.
- [11] Hua-Shu, D., Gang, J., & Chengwang, L. (2013), Numerical Simulation and Stability Study of Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013.
- [12] Kleine, D.D., & Reddy, B.D. (2005). Finite element analysis of flows in secondary settling tanks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64.
- [13] Kynch, G.J. (1952) A Theory of Sedimentation. *Transactions of the Faraday Society*, 48, 166 - - 176.
- [14] Latsa, M., Assimacopoulos, D., Stamou, A., & Markatos, N.C. (1999). Two-phase modeling of batch sedimentation. *Applied Mathematical Modelling*, 23, 881 - - 897.
- [15] Michaels, A.S., & Bolger, J.C. (1962). Settling Rates and Sediment Volumes of Flocculated Kaolin Suspensions. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1, 24 - - 33.
- [16] McCaffery, S. J., Elliott, L. & Ingham, D.B. (1998). One-dimensional enhanced sedimentation in inclined fracture channels. *Mathematical Engineering in Industry*, 6, 261 - - 290.
- [17] McCaffery, S. J., Elliott, L. & Ingham, D.B. (1998). Two-dimensional enhanced sedimentation in inclined fracture channels. *Mathematical Engineering in Industry*, 7(1), 97 - - 125.
- [18] Nakamura, H. (1937). La cause de l'accélération de la vitesse de sédimentation des suspensions dans les recipients inclinés. *Keijo Journal of Medicine*, 8, 256 - - 296.
- [19] Oliver, D.R. and Jenson, V.G. (1964). The inclined settling of dispersed suspensions of spherical particles in square-section tubes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 42: 191 - - 195.
- [20] Ostrach, S., (1972). Natural Convection in Enclosures. *Adv. Heat Transf.* 8, 161 - - 227.
- [21] Pearce, K. W. (1962). Settling in the presence of downward-facing surfaces. In: *Proc. Symp. on the Interaction Between Fluids and Particles: 3rd Congress of the European Federation of Chemical Engineering 9*. P. A. Rottenburg (Ed.), pp. 30 - - 39, Institution of Chemical Engineers, London.
- [22] Ponder, E. (1925). On sedimentation and rouleaux formation. *Quarterly Journal of Experimental Physiology: Translation and Integration*, 15(3), 235 - - 252.

- [23] Reyes, C., Ihle, C.F., Apaz, F. y Cisternas, L.A., (2019). Heat-assisted batch settling of mineral suspensions in inclined containers. *Minerals* 2019, 9, 228.
- [24] Reyes, C., Alvarez, M., Ihle, C. F., Contreras, M. & Kracht, W. (2019). The influence of seawater on magnetite tailing rheology. *Minerals Engineering*, 131, 363 - - 369.
- [25] Richardson, J.F. & Zaki, W.N. (1954). Sedimentation and fluidisation: Part I. *Transaction of the Institution of Chemical Engineers. (London)* 32, 34 - - 53.
- [26] Ruiz-Baier, R., & Torres, H. (2015). Numerical solution of a multidimensional sedimentation problem using finite volume-element methods. *Applied Numerical Mathematics*, 95, 280 - - 291.
- [27] Ruiz-Baier, R., & Lunati, I. (2016). Mixed finite element-discontinuous finite volume element discretization of a general class of multicontinuum models. *Journal of Computational Physics*, 322, 666 - - 688.
- [28] Schneider, W. (1982). Kinematic-wave theory of sedimentation beneath inclined walls, *Journal of Fluid Mechanics*, 120, 323 - - 346.
- [29] Shishkina, O., & Horn, S. (2016). Thermal convection in inclined cylindrical containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 790, R3.
- [30] Ungarish, M. (1993). *Hydrodynamics of Suspensions*. Springer-Verlag, Berlin.
- [31] Unwin, A.T (1994). The mixed convection flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in a vertical fracture. *Math. Engng. Ind.* 5,59 - - 76.
- [32] Wan, T., Aliabadi, S. & Bigler, C. (2009). A hybrid scheme based on finite element/volume methods for two immiscible fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61: 930 - - 944.
- [33] Zahavi, E. & Rubin. E. (1975). Settling of solid suspensions under and between inclined surfaces. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*. 14, 34 - - 41.

## Nota

El tema de esta tesis se investigó más a fondo en el trabajo "*Coupled finite volume methods for settling in inclined vessels with natural convection*", desarrollado en el Centro de Investigación en Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción.